FUNGSI PEMBANGKIT

Fungsi pembangkit (*generating function*) dari sebuah fungsi numerik

$$a_n=(a_0, a_1, a_2, \dots , a_r, \dots)$$

adalah sebuah deret tak hingga

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n + \dots .$$

Pada deret tersebut, pangkat dari variabel z merupakan indikator sedemikian hingga koefisien dari z^n adalah harga fungsi numerik pada n. Untuk sebuah fungsi numerik a_n digunakan nama $A(z)$ untuk menyatakan fungsi pembangkitnya.

Contoh 6.1.

Diketahui fungsi numerik $g_n = 3^n$, $n \ge 0$. Fungsi numerik tersebut dapat pula ditulis sebagai $g_n = (1, 3, 3^2, 3^3, \dots)$. Fungsi pembangkit dari fungsi numerik g_n tersebut adalah

$$G(z) = 1 + 3 z + 3^2 z^2 + 3^3 z^3 + \dots 3^n z^n + \dots$$

yang dalam bentuk tertutup dapat ditulis sebagai $G(z) = \frac{1}{1-3z}$ □

Jika fungsi numerik c merupakan jumlah dari fungsi numerik a dan b, maka fungsi pembangkit dari fungsi numerik c tersebut adalah $C(z) = A(z) + B(z)$, dimana $A(z)$ merupakan fungsi pembangkit dari fungsi numerik a dan $B(z)$ adalah fungsi pembangkit dari fungsi numerik b.

Contoh 6.2.

Diketahui fungsi numerik $g_n = 3^n$, $n \ge 0$ dan fungsi numerik $h_n = 2^n$, $n \ge 0$. Jika $j_n = g_n + h_n$, maka $J(z) = \frac{1}{1-3z} + \frac{1}{1-2z}$ yang dapat pula ditulis sebagai $J(z) = \frac{2-5z}{1-5z+6z^2}$ □

Contoh 6.3.

Diketahui fungsi pembangkit dari fungsi numerik a adalah $A(z) = \frac{2}{1-4z^2}$. Fungsi pembangkit tersebut dapat ditulis sebagai $A(z) = \frac{1}{1+2z} + \frac{1}{1-2z}$. Dengan demikian diperoleh fungsi numerik a_n :

$$a_n = 2^n + (-2)^n , n \ge 0$$

atau dapat ditulis sebagai

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \ \ ganjil \\ 2^{n+1} & n \ \ genap \end{cases}$$ □

Jika $A(z)$ merupakan fungsi pembangkit dari fungsi numerik a_n, maka $z^i A(z)$ adalah fungsi pembangkit dari $S^i a$, untuk i bilangan bulat positif.

Contoh 6.4.

Diketahui fungsi numerik $g_n = 3^n$, $n \geq 0$. Fungsi pembangkit dari $b_n = S^6 g$ adalah $B(z) = z^6 \left(\frac{1}{1-3z}\right)$ yang dapat pula ditulis sebagai $B(z) = \frac{z^6}{1-3z}$ □

Jika $A(z)$ merupakan fungsi pembangkit dari fungsi numerik a_n, maka $z^{-i}(A(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_{i-1} z^{i-1})$ adalah fungsi pembangkit dari $S^{-i} a$, untuk i bilangan bulat positif.

Contoh 6.5.

Diketahui fungsi numerik $g_n = 3^n$, $n \geq 0$. Fungsi pembangkit dari $c_n = S^{-4} g$ adalah

$$C(z) = z^{-4}(G(z) - g_0 - g_1 z - g_2 z^2 - g_3 z^3)$$

$$C(z) = z^{-4}\left(\frac{1}{1-3z} - 1 - 3z - 3^2 z^2 - 3^3 z^3\right)$$ □

Jika $A(z)$ merupakan fungsi pembangkit dari fungsi numerik a_n dan fungsi numerik $b_n = \Delta a$, maka $B(z) = \frac{1}{z}(A(z) - a_0) - A(z)$.

Contoh 6.6.

Diketahui fungsi numerik $g_n = 3^n$, $n \geq 0$. Fungsi pembangkit dari $d_n = \Delta g$ adalah

$$D(z) = \frac{1}{z}(G(z) - g_0) - G(z).$$

$$D(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-3z} - 1\right) - \frac{1}{1-3z}$$ □

Jika $A(z)$ merupakan fungsi pembangkit dari fungsi numerik a_n dan fungsi numerik $c_n = \nabla a$, maka $C(z) = A(z) - z.\,A(z)$.

Contoh 6.7.

Diketahui fungsi numerik $g_n = 3^n$, $n \geq 0$.

Fungsi pembangkit dari $e_n = \nabla g$ adalah

$$E(z) = G(z) - z.\,G(z) = \frac{1}{1-3z} - \frac{z}{1-3z}$$

$$E(z) = \frac{1-z}{1-3z}$$