MATRIKS

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks A dengan m baris dan n kolom ($A_{m \times n}$).

Notasi Matriks :
$A = (a_{ij})$, dimana a_{ij} adalah elemen pada baris ke i kolom ke j

Kesamaan Matriks
Matriks A dan matrik B dikatakan sama ($A = B$), jika dan hanya jika :
a. Ordo kedua matriks sama.
b. Semua elemen yang bersesuaian mempunyai nilai yang sama.

Operasi Pada Matriks

a. Penjumlahan pada Matriks (berlaku untuk matriks –matriks yang berukuran sama).

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, matriks yang berukuran sama , maka $A + B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$, di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ untuk setiap i dan j.

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ maka

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+1 \\ 3+2 & 3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

b. Perkalian skalar terhadap matriks

Jika λ suatu skalar dan $A = (a_{ij})$ maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ maka $2A = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 \\ 2.3 & 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

c. Perkalian Matriks

Pada umumnya perkalian Matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian :
$AB \neq BA$.

Syarat Perkalian Matriks :
Banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Definisi :

Misal $A = (a_{ij})$ berukuran $(m \times n)$ dan $B = (b_{ij})$ berukuran $(n \times p)$. Maka perkalian $A \times B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berukuran $(m \times p)$ di mana $c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$ untuk setiap $i = 1,2,\ldots,m$ dan $j = 1,2,\ldots,p$.

Contoh :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

   $A \times B = 1.2 + 2.0 + 3.1 = 5$

2. $A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 0 \quad 2} \\ -2 \quad 2 \quad 1 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad -1} \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ maka

$$A \times B = \begin{pmatrix} \boxed{(1\times2)+(0\times-1)+(2\times0)} & (1\times2)+(0\times3)+(2\times1) \\ (-2\times2)+(2\times-1)+(1\times0) & (-2\times2)+(2\times3)+(1\times1) \\ (1\times2)+(3\times-1)+(-1\times0) & \boxed{(1\times2)+(3\times3)+(-1\times1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 3 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$$

d. *Transpose* dari suatu Matriks

Misal $A = (a_{ij})$ berukuran $(m \times n)$ maka *transpose* dari A adalah matriks A^T berukuran $(n \times m)$ maka $A^T = (a_{ji})$.

Beberapa Sifat matriks transpose :

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(ii) $(A^T)^T = A$
(iii) $\lambda(A^T) = (\lambda A)^T$
(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

Catatan :

Bila Matriks $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks kompleks, maka *Transpose Hermitian* (*Conjugate Transpose*) yaitu $A^H = \left(\bar{a}_{ij}\right)^T = \left(\bar{a}_{ji}\right)$, jika $z = x - yi$ maka $\bar{z} = x + yi$

Contoh :

$A = \begin{pmatrix} 3-i & 1-i \\ i & 3 \end{pmatrix}$ maka $A^H = \begin{pmatrix} 3+i & -i \\ 1+i & 3 \end{pmatrix}$

Beberapa Jenis Matriks Khusus

(1) Matriks Bujur Sangkar

Adalah suatu matriks dengan banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom.

Contoh :

A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah matriks bujur sangkar ordo 2.

(2) Matriks Nol

Adalah matriks yang semua elemennya nol.

(3) Matriks Diagonal

Adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah nol.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(4) Matriks Identity (Satuan)

Adalah matriks diagonal yang elemen –elemen diagonal utamanya semua sama dengan 1.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Matriks Skalar

Adalah matriks diagonal utamanya sama dengan *k*. Matriks Identitas adalah bentuk khusus dari matriks skalar dengan k = 1

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(6) Matriks Segitiga Bawah (Lower Triangular)

Adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen **di atas** diagonal utama sama dengan nol.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(7) Matriks Segitiga Atas (Upper Triangular)

Adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen **di bawah** diagonal utama sama dengan nol.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(8) Matriks Simetris

Adalah matriks yang transposenya sama dengan dirinya sendiri. Dengan perkataan lain **$A = A^T$** dan matriks simetris merupakan matriks bujur sangkar.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(9) Matriks Antisimetris

Adalah matriks yang transposenya adalah negatifnya. Dengan perkataan lain **$A^T = -A$.**

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(10) Matriks Hermitian

Adalah matriks dengan transpose hermitiannya sama dengan dirinya sendiri. Dengan perkataan lain **$A^H = -A$**

Contoh

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{pmatrix} \text{ dan } A^H = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 4 \end{pmatrix}$$

(11) Matriks Invers (Kebalikan) :

Jika A dan B adalah matriks bujur sangkar ordo n dan berlaku **AB = BA + I** maka dikatakan B invers dari A dan ditulis **$B = A^{-1}$** sebaliknya A adalah invers dari B dan ditulis **$A = B^{-1}$**.

(12) Matriks Komutatif.

Adalah Jika A dan B matriks yang bujur sangkar dan berlaku **AB = BA.**

Anti Komutatif jika **AB = -BA.**

(13) Matriks Idempoten, Periodik, Nilpoten

- Matriks Idempoten

Jika A Matriks Bujur Sangkar dan berlaku $AA = A^2 = A$.

- Matriks Periodik

Jika A Matriks Bujur Sangkar dan berlaku AAA…A = A^p = A dikatakan periodik dengan periode p-1.

- Matriks Nilpoten

Jika A Matriks Bujur Sangkar dan berlaku $A^r = 0$, dikatakan Nilpoten dengan indeks r dan r bilangan bulat positip. 0 adalah matriks Nol.

Transformasi Elementer

(1a) Penukaran tempat baris ke-i dan baris ke-j ditulis $H_{ij}(A)$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } H_{12}(A) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(1b) Penukaran tempat kolom ke-i dan kolom ke-j ditulis $K_{ij}(A)$.

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } K_{12}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

(2a) Memperkalikan baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $H_i^{(\lambda)}(A)$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } H_2^{(2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 12 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(2b) Memperkalikan kolom ke-j dengan skalar $\lambda \neq 0$, ditulis $K_j^{(\lambda)}(A)$

Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } K_1^{(3)}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 6 \\ 21 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(3a) Menambah baris ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ kali baris ke -j, ditulis $H_{ij}^{(\lambda)}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } H_{21}^{(1)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Baris 1 kali 1 tambahkan dengan baris 2 diletakkan di baris 2

(3b) Menambah kolom ke-i dengan skalar $\lambda \neq 0$ kali kolom ke -j, ditulis $K_{ij}^{(\lambda)}$ (A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \text{ maka } K_{31}^{(2)}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 5 & 7 & 14 \\ 7 & 8 & 23 \end{pmatrix}$$

Kolom 1 kali 2 tambahkan dengan kolom 3 diletakkan di kolom 3

Rank Matriks

Rank adalah banyaknya maksimum baris atau kolom yang tidak dapat dinolkan

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Cara 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{31}^{(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, r(A) = 2.

Cara 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{H_{31}^{2(-5)}}{\overset{H_{21}^{2(-3)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}^{(-1)}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi, r(A) = 2.

Determinan Matriks

- Matriks 2×2

  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka det(A) = $|A|$= ad - bc.

  Contoh:

  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ maka $|A|$= (-1)(3) - (4)(-2) = -3 + 8 = 5

- Matriks 3×3

  a. Metode Sarrus

  $$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$A = \left(\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right)\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

maka $|A|= aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$

Contoh:

$$A = \left(\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{matrix}\right)\begin{matrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

maka $|A|= (1)(2)(3) + (3)(2)(2) + (-1)(-1)(4) - (-1)(2)(2) - (1)(2)(4) - (3)(-1)(3)$

$= 6 + 12 + 4 + 4 - 8 + 9 = 27$

b. Ekspansi Baris atau Kolom

- Minor

  M_{ij} yaitu matriks yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke i dan kolom ke j.

  Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \text{kolom 3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cancel{-1} \\ \cancel{-1} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ 2 & 4 & \cancel{3} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \text{baris 2} \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$M_{23}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Kofaktor

  $C_{ij} = (-1)^{i+j} | M_{ij} |$

$$C_{23}(A) = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5 \left[(1)(4) - (3)(2)\right] = -(4-6) = 2$$

Mencari determinan dari A dengan ekspansi baris 1

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (6-8) - 3(-3-4) - (-4-4)$$

$$= -2 + 21 + 8 = 27$$

Mencari determinan dari A dengan ekspansi kolom 2

$$
\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2^{+} & 2 \\ 2 & 4^{-} & 3 \end{vmatrix} \\
&= -3\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= -3(-3-4) + 2(3+2) - 4(2-1) \\
&= 21 + 10 - 4 = 27
\end{aligned}
$$