PRINSIP INKLUSI DAN EKSKLUSI

Misalkan A dan B sembarang himpunan. Penjumlahan $|A|+|B|$ menghitung banyaknya elemen A yang tidak terdapat dalam B dan banyaknya elemen B yang tidak terdapat dalam A tepat satu kali, dan banyaknya elemen yang terdapat dalam $A \cap B$ sebanyak dua kali. Oleh karena itu, pengurangan banyaknya elemen yang terdapat dalam $A \cap B$ dari $|A|+|B|$ membuat banyaknya anggota $A \cap B$ dihitung tepat satu kali. Dengan demikian,

$$|A \cup B| = |A|+|B| - |A \cap B|.$$

Generalisasi dari hal tersebut bagi gabungan dari sejumlah himpunan dinamakan prinsip inklusi-eksklusi.

Contoh 1

Dalam sebuah kelas terdapat 25 mahasiswa yang menyukai matematika diskrit, 13 mahasiswa menyukai aljabar linier dan 8 orang diantaranya menyukai matematika diskrit dan aljabar linier. Berapa mahasiswa terdapat dalam kelas tersebut ?

Jawab :

Misalkan A himpunan mahasiswa yang menyukai matematika diskrit dan B himpunan mahasiswa yang menyukai aljabar linier. Himpunan mahasiswa yang menyukai kedua mata kuliah tersebut dapat dinyatakan sebagai himpunan $A \cap B$. Banyaknya mahasiswa yang menyukai salah satu dari kedua mata kuliah tersebut atau keduanya dinyatakan dengan $|A \cup B|$. Dengan demikian

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 25 + 13 – 8$$
$$= 30.$$

Jadi, terdapat 30 orang mahasiswa dalam kelas tersebut.

Contoh 2

Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 7 atau 11 ?

Jawab :

Misalkan P himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 dan Q himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 11.

Dengan demikian $P \cup Q$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 atau habis dibagi 11, dan $P \cap Q$ himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 dan habis dibagi 11.

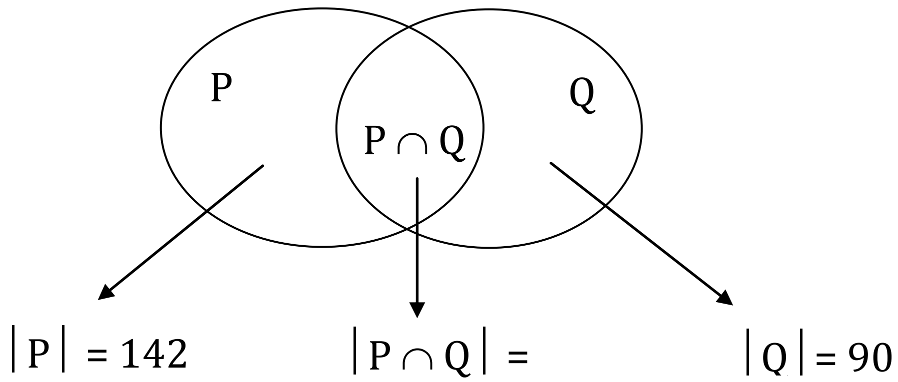
$$|P| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 \qquad |Q| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$$

$$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kpk}(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$$

$$|P \cup Q| = |P| + |Q| - |P \cap Q| = 142 + 90 – 12 = 220.$$

Jadi, terdapat 220 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 atau habis dibagi 11.

Ilustrasi dari penghitungan tesebut dapat dilihat pada diagram di bawah ini.



Jika A, B dan C adalah sembarang himpunan, maka

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Contoh 3

Berapa banyak bilangan bulat positif yang tidak melampaui 1000 yang habis dibagi oleh 5, 7 atau 11 ?

Jawab :

Misalkan P himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, Q himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7, dan R himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 11. Dengan demikian $P \cup Q \cup R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5 atau 7 atau 11, dan himpunan $P \cap Q \cap R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, 7 dan 11. Himpunan $P \cap Q$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5 dan 7, $P \cap R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5 dan 11, dan $Q \cap R$ adalah himpunan bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 7 dan 11.

$|P| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200 \qquad |Q| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142 \qquad |R| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90$

$|P \cap Q| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kpk}(5,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28$

$|P \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kpk}(5,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18$

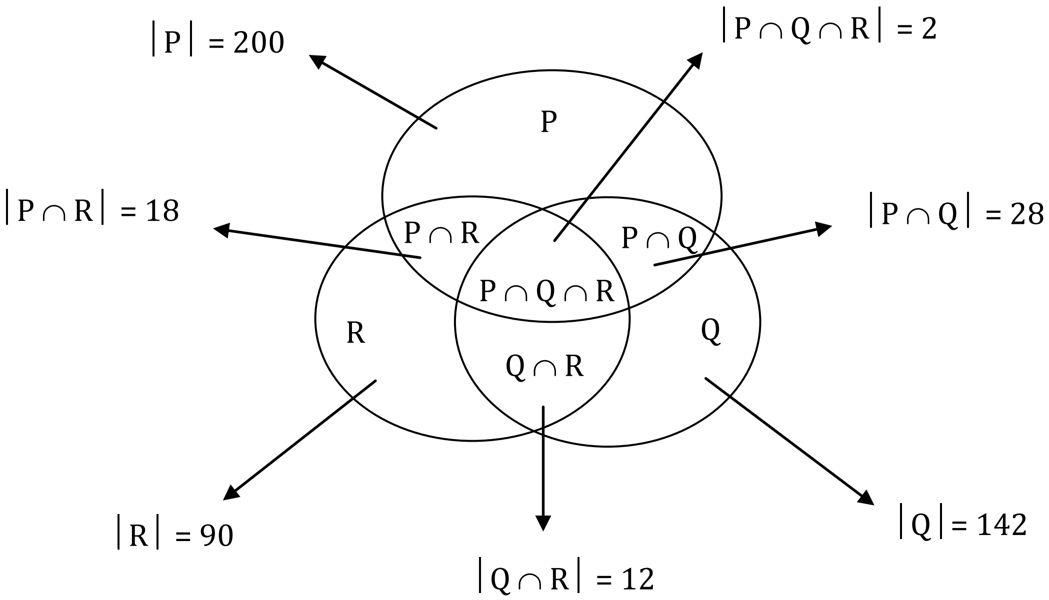
$|Q \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kpk}(7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12$

$|P \cap Q \cap R| = \left\lfloor \frac{1000}{\text{kpk}(5,7,11)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{385} \right\rfloor = 2$

$|P \cup Q \cup R| = 200 + 142 + 90 - 28 - 18 - 12 + 2 = 376.$

Jadi, terdapat 376 bilangan bulat positif tidak melampaui 1000 yang habis dibagi 5, 7 atau habis dibagi 11.

Ilustrasi dari penghitungan tesebut dapat dilihat pada diagram di bawah ini.



Formulasi prinsip inklusi eksklusi untuk himpunan hingga A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_n , adalah sebagai berikut :

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \\
&+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots\ldots + \\
&+ (-1)^{n+1} |A_i \cap A_j \cap \ldots \cap A_n| .
\end{aligned}
$$

Contoh 4

Berdasarkan prinsip inklusi eksklusi, formula untuk menghitung banyaknya anggota himpunan hasil gabungan empat himpunan hingga.

$$
\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| \\
&- |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|
\end{aligned}
$$