INTERPOLASI

- Para rekayasawan dan ahli ilmu alam sering bekerja dengan sejumlah data diskrit (yang umumnya disajikan dalam bentuk tabel). Data didalam tabel mungkin diperoleh dari hasil pengamatan dilapangan, hasil pengukuran dilaboratorium, atau tabel yang diambil dari buku-buku acuan.

Contoh :

Sebuah pengukuran fisika untuk menentukan hubungan antara tegangan yang diberikan kepada baja tahan karat dan waktu yang diperlukan hingga baja tsb patah.

x	5	10	15	20	25	30	35
y	40	30	25	40	18	20	22

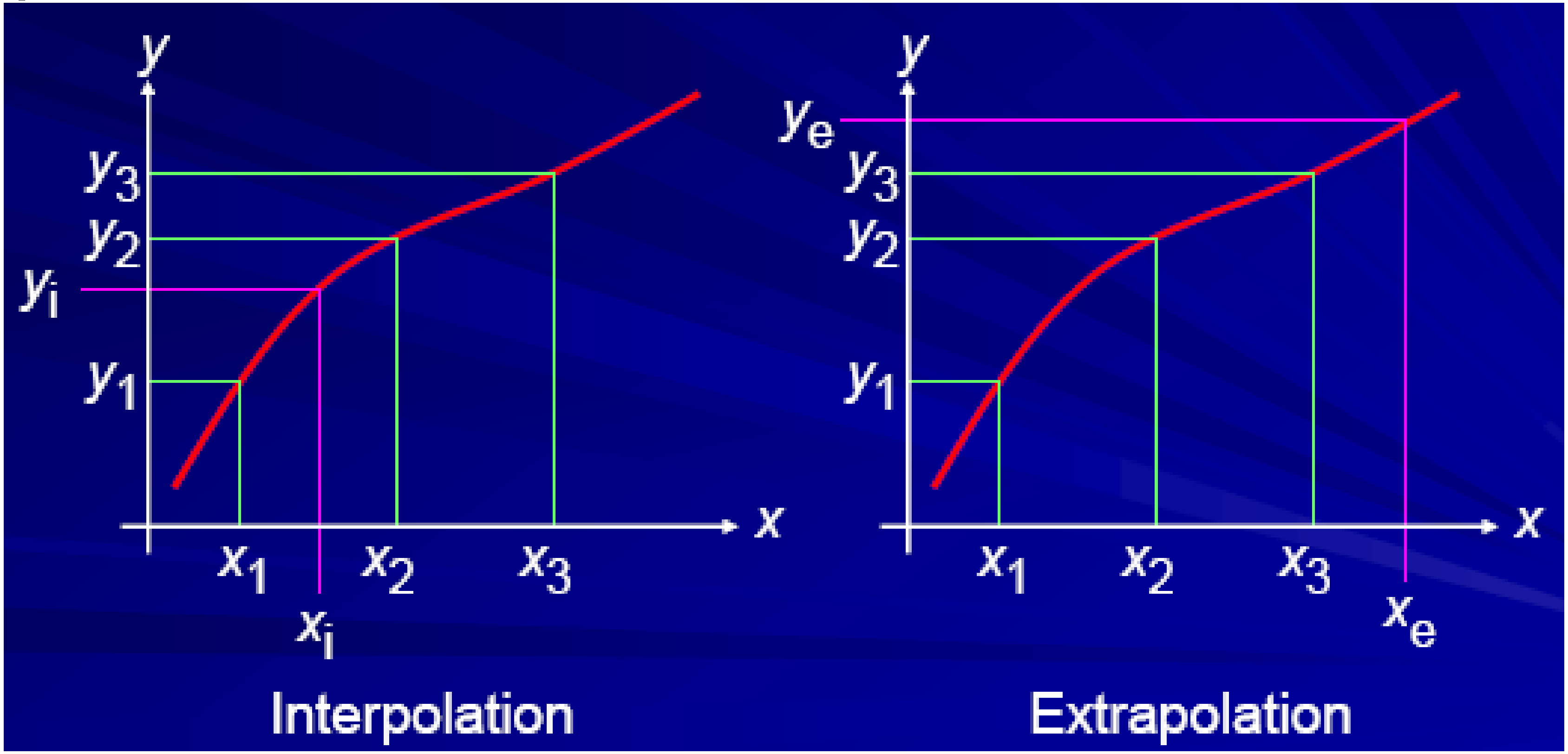
x = Tegangan yang diterapkan, kg/mm^2

y = waktu patah , jam

- Interpolasi adalah teknik mencari harga suatu fungsi pada suatu titik diantara 2 titik yang nilai fungsi pada ke-2 titik tersebut sudah diketahui
- dpl. : cara menentukan harga fungsi f dititik x* ε $[x_0,x_n]$ dengan menggunakan informasi dari seluruh atau sebagian titik-titik yang diketahui (x_0, x_1, …., x_n)

x	x_0	x_1	x_2	…….	x_n
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	…….	$f(x_n)$

Perbedaan Interpolasi dan Ekstrapolasi



Teknik Umum yang digunakan :

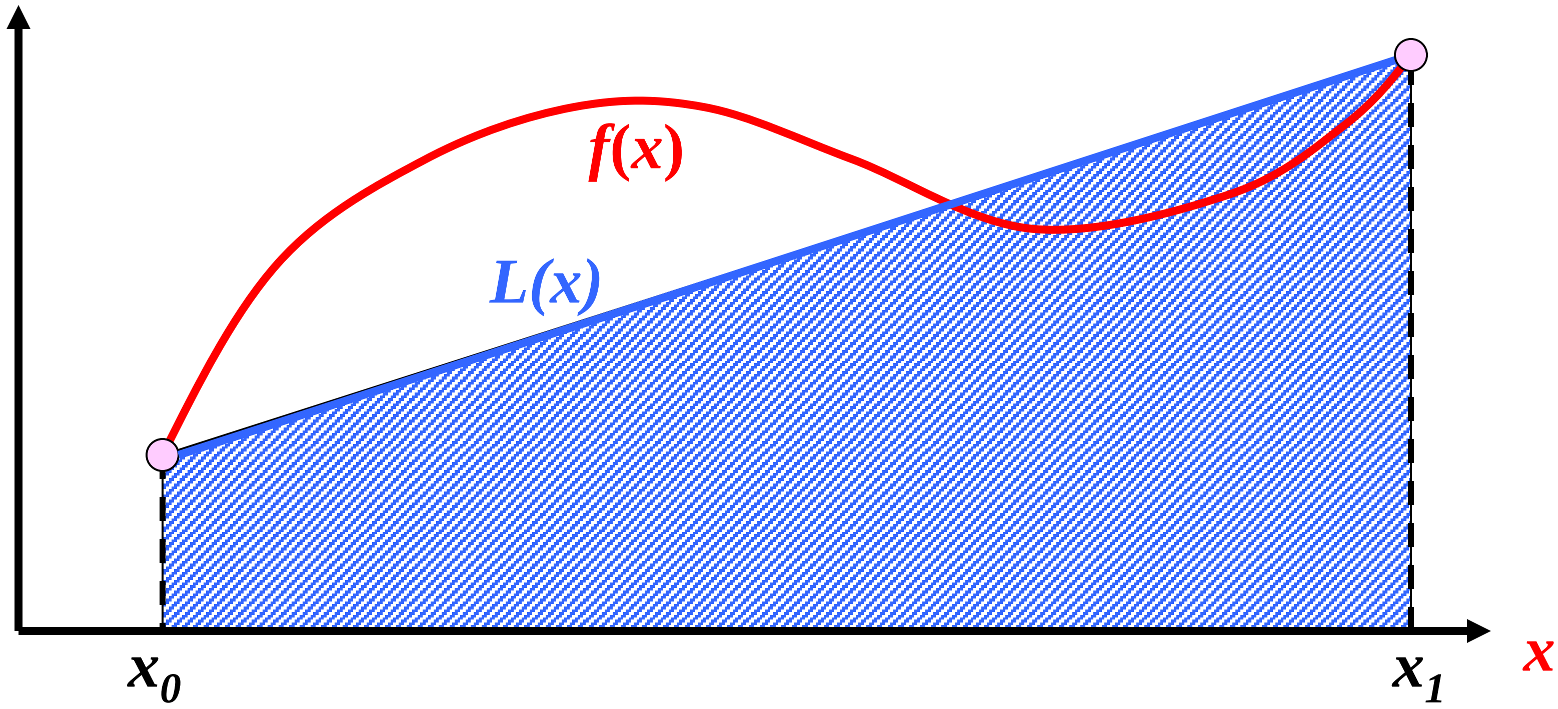
(i) Membentuk polinomial berderajat ≤ n yg mempunyai harga fungsi di titik-titik yang diketahui → Polinomial Interpolasi

(ii) Masukkan titik yang ingin dicari harga fungsinya ke dalam polinomial interpolasi

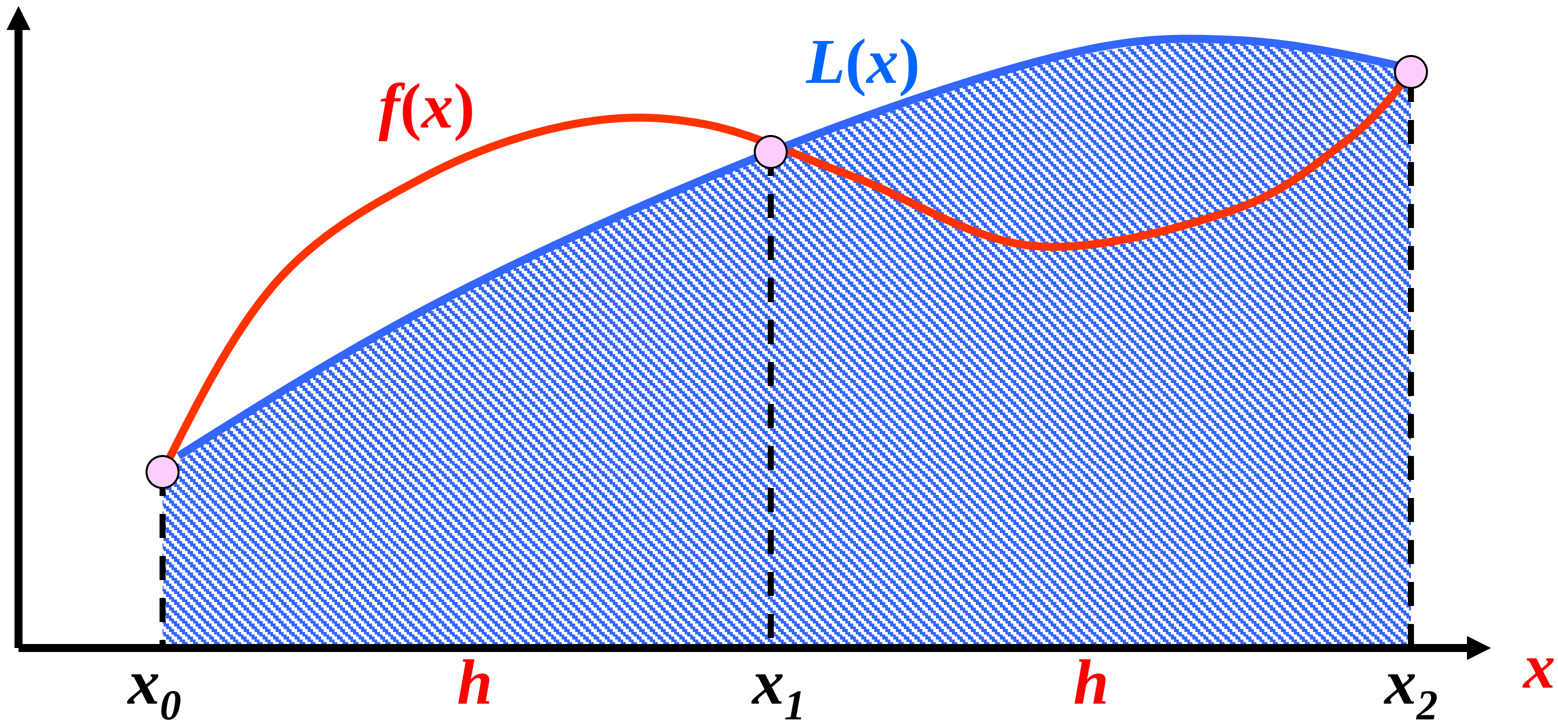
Jenis Interpolasi

- Interpolasi Linier
- Interpolasi Kuadrat
- Interpolasi Lagrange
- Interpolasi Newton

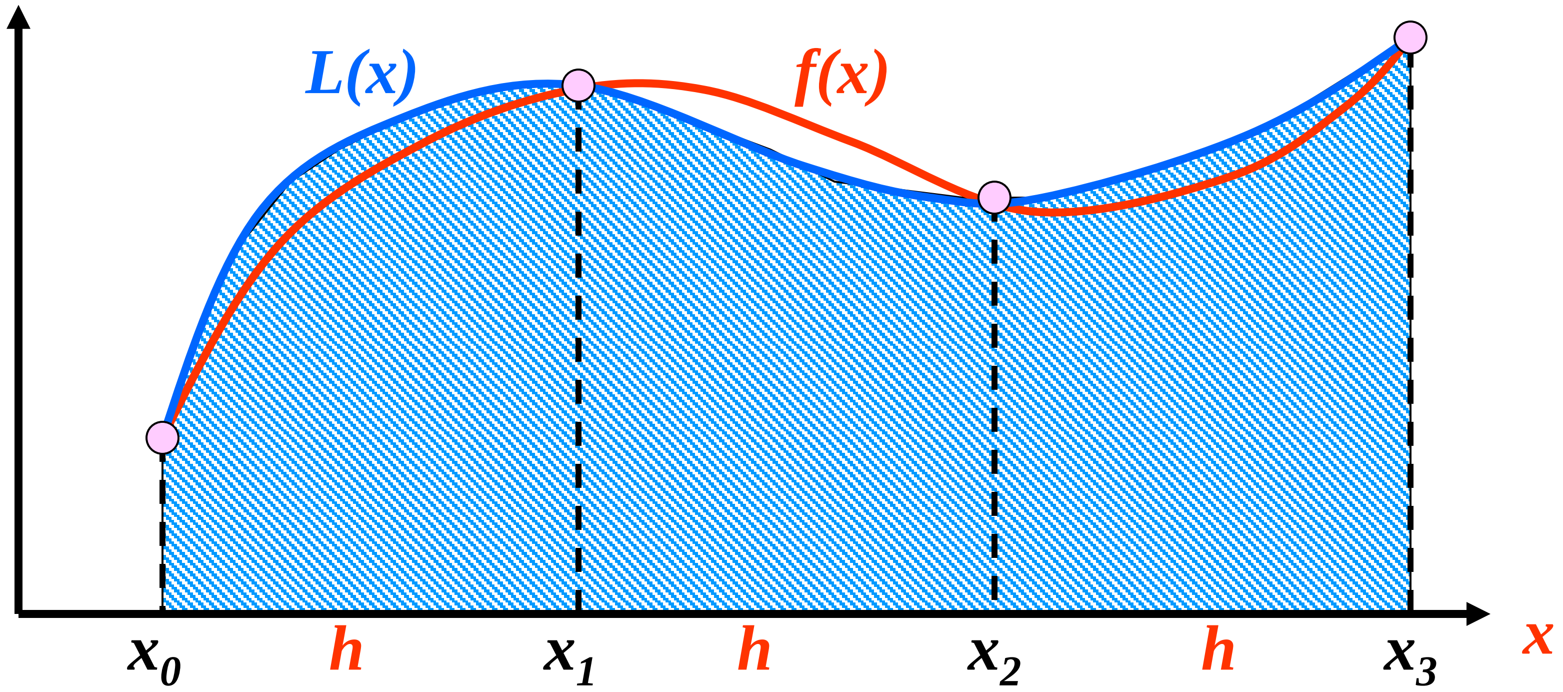
Interpolasi Linier



Interpolasi Kudrat



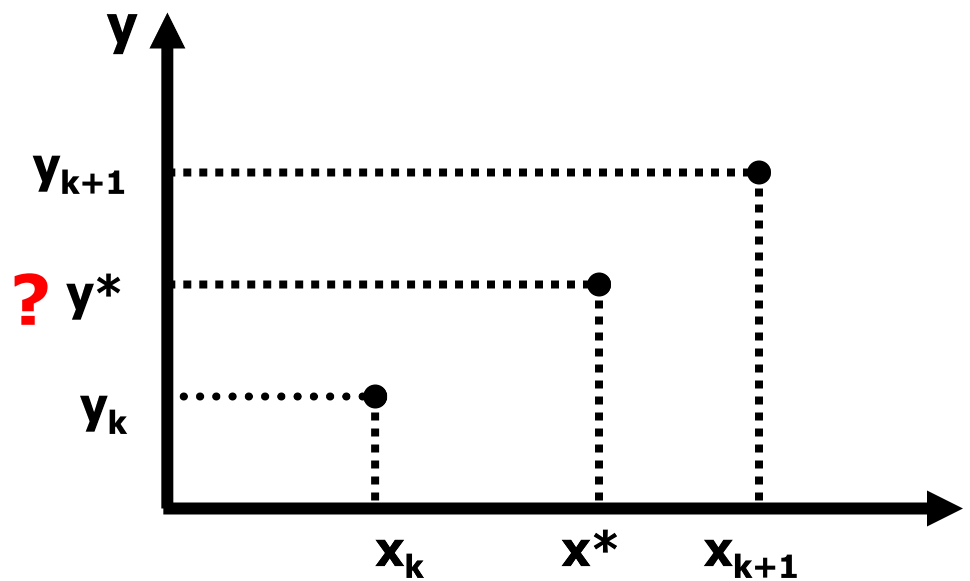
Interpolasi Qubic



INTERPOLASI LINIER (1)

- Misalkan ada m bilangan : $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dan bilangan lain yang berkaitan : $y_1, y_2, \ldots, y_m$
- maka masalahnya : berapa harga y* pada

$x^* \, \varepsilon \, [x_k, x_{k+1}]$?



INTERPOLASI LINIER (2)

- Ambil ruas garis yang menghubungkan titik (x_k,y_k) dan (x_{k+1},y_{k+1})
- Diperoleh persamaan garisnya :

$$\frac{y^* - y_k}{x^* - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$$

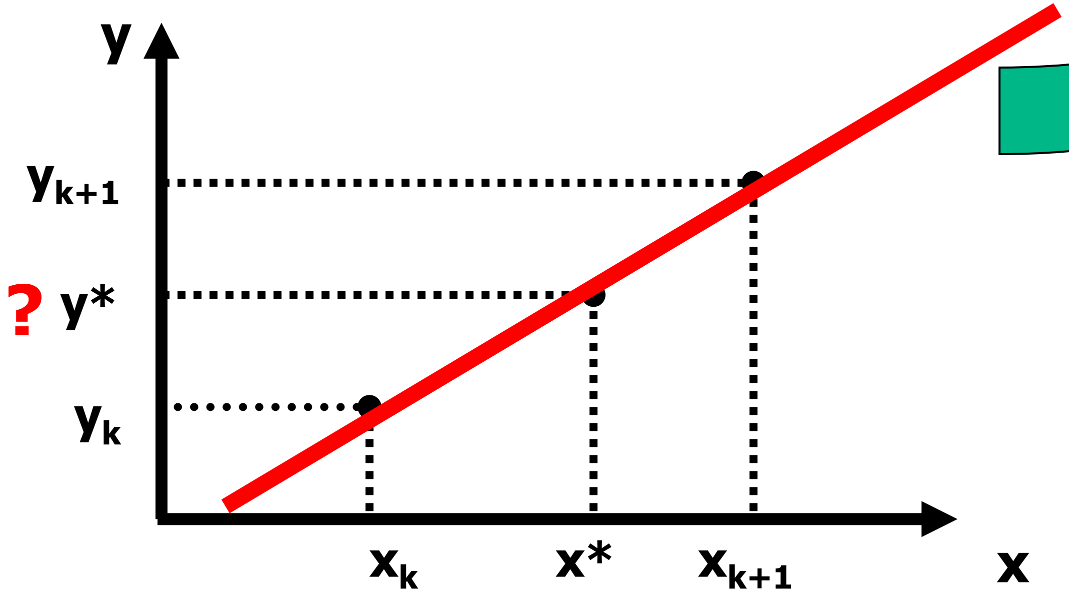
$$y^* - y_k = \frac{x^* - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

$$y^* = y_k + \frac{x^* - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

INTERPOLASI LINIER (3)

- Jadi persamaan garisnya adalah :

$$y^* = y_k + \frac{x^* - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$



Contoh – 1 : (1)

Diketahui data sebagai berikut :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

Tentukan harga **y** pada **x = 6,5 !**

Jawab : x = 6,5 terletak antara x=6 & x=7

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

Hasilnya

$$y = 36 + \frac{(6,5-6)}{(7-6)}(49-36) = 42,5$$

Contoh – 1 : (2)

Alternatif 2 :

x = 6,5 terletak antara x=1 & x=7

$$y = y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

$$y = 1 + \frac{(6,5-1)}{(7-1)}(49-1) = 1 + \frac{(5,5)}{(6)}(48) = 45$$

Hasilnya

Contoh – 1 : (3)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
y	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

- Bandingkan hasil kedua jawaban tersebut !!
- Mana yang mendekati jawaban yang sesungguhnya ..??
- Karena hub. x & y adalah $\mathbf{y = x^2}$ maka untuk harga $\mathbf{x = 6{,}5}$ didapat $\mathbf{y = (6{,}5)^2 = 42{,}25}$

=> Kesalahan mutlak (E) : $|42{,}5 - 42{,}25| = 0{,}25$

Contoh – 1 : (4)

Kesalahan mutlak (E), untuk :

y = 42,5 → |42,5 – 42,25| = **0,25** = **25 %**

Sedangkan untuk

y = 45 → |45 – 42,25| = **3,25** = **325 %**

Contoh-2 :

Diketahui tabel akar bilangan sbb :

N	....	2,14	2,15	2,16	....
$N^{1/2}$	....	1,46287	1,46629	1,46969	....

Tentukan akar dari 2,155

$$(2{,}155)^{1/2} = 1{,}46629 + (0{,}005/0{,}010)\ (1{,}46969 - 1{,}46629)$$

$$= 1{,}46629 + 0{,}00170$$

$$(2{,}155)^{1/2} = 1{,}46799$$

Kesalahan mutlaknya $|1{,}4679918 - 1{,}46799| = 0{,}0000018$

- Tentukan akar dari 2,153 dan Kesalahan mutlaknya !

Contoh 3:

- Jarak yang dibutuhkan sebuah kendaraan untuk berhenti adalah fungsi kecepatan. Data percobaan berikut ini menunjukkan hubungan antara kecepatan dan jarak yang dibutuhkan untuk menghentikan kendaraan.

Kecepatan (mil/jam)	10	20	30	40	50	60	70
Jarak henti (feet)	12	21	46	65	90	111	148

- Perkirakan jarak henti yang dibutuhkan bagi sebuah kenderaan yang melaju dengan kecepatan 45 mil/jam.

Contoh 3:

- maka untuk mencari nilai x=45 maka,

$$f_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{90 - 65}{50 - 40}(45 - 40)$$

$$f_1(45) = 65 + \frac{25}{10}(5) = 65 + 12.5 = 77.5 \text{ feet}$$

INTERPOLASI KUADRAT

- Banyak kasus, penggunaan interpolasi linier tidak memuaskan karena fungsi yang diinterpolasi berbeda cukup besar dari fungsi linier
- Untuk itu digunakan polinomial lain yg berderajat dua (interpolasi kuadrat) atau lebih mendekati fungsinya
- Caranya :

- Pilih 3 titik & buat polinomial berderajat dua melalui ke - 3 titik tsb., shg dpt dicari harga fgs. pada $x = x^*$
- Pemilihan ke-3 ttk tsb., dapat :
- $x_{k-1} < x_k < x_{k+1}$ atau
- $x_{k-1} < x^* < x_k < x_{k+1}$

Persamaan umum Polinomial kuadrat :

$$P(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 \quad .....(*)$$

3 titik (x_{k-1},y_{k-1}), (x_k,y_k) & (x_{k+1},y_{k+1}) dilalui fgs. P(x) berarti:

$$\begin{aligned} y_{k-1} &= a_0 + a_1\,x_{k-1} + a_2\,x_{k-1}^2 \\ y_k &= a_0 + a_1\,x_k + a_2\,x_k^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (**) \\ y_{k+1} &= a_0 + a_1\,x_{k+1} + a_2\,x_{k+1}^2 \end{aligned}$$

=> Akan diperoleh dari 3 pers. yaitu a_0, a_1 dan a_2 kemudian subst. ke (*) & diperoleh pers. kuadrat, shg dapat dicari nilai fgs. untuk $x = x^*$ yaitu $P(x^*) = a_0 + a_1\,x^* + a_2\,x^{*2}$

=> Sistim pers. non homogen (**) memp. solusi dan solusinya unik (tunggal)

Contoh :

- Diberikan titik ln(8) = 2.0794, ln(9) = 2.1972, ln(9.5) = 2.2513. Tentukan nilai ln(9.2) dengan interpolasi kuadrat

- Sistem Pers Linier yang terbentuk.
  - $64\,a + 8\,b + c = 2.0794$
  - $81\,a + 9\,b + c = 2.1972$
  - $90.25\,a + 9.5\,b + c = 2.2513$
- Penyelesaian a= -0.0064 b = 0.2266

  c = 0.6762
- Sehingga p2(9.2) = 2.2192

INTERPOLASI LAGRANGE

- Interpolasi Lagrange adalah salah satu formula untuk interpolasi berselang tidak sama selain formula interpolasi Newton umum & metoda Aitken. Walaupun demikian dapat digunakan pula untuk interpolasi berselang sama.
- Misalkan fgs. y(x) kontinu & diferensiabel sampai turunan (n+1) dalam interval buka (a,b). Diberikan (n+1) titik (x_0,y_0), (x_1,y_1), …, (x_n,y_n) dengan nilai x tidak perlu berjarak sama dengan yang lainnya, dan akan dicari suatu polinom berderajat n. Untuk pemakaian praktis, formula interpolasi Lagrange dapat dinyatakan sbb. :

Formula Interpolasi Lagrange

Jika y(x) : nilai yang diinterpolasi; x : nilai yg berkorespondensi dg y(x)

$x_0, x_1, \ldots, x_n$: nilai x dan $y_0, y_1, \ldots, y_n$: nilai y

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)} y_0 +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)} y_1 +$$

.

.

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})} y_n$$

Contoh 1:

Nilai yg. berkorespondensi dengan $y = {}^{10}\log x$ adalah :

X	300	304	305	307
${}^{10}\log x$	2,4771	2,4829	2,4843	2,4871

Carilah ${}^{10}\log 301$?

Untuk menghitung $y(x) = {}^{10}\log 301$ dimana $x = 301$, maka nilai diatas menjadi

$x_0 = 300$	$x_1 = 304$	$x_2 = 305$	$x_3 = 307$
$y_0 = 2{,}4771$	$y_1 = 2{,}4829$	$y_2 = 2{,}4843$	$y_3 = 2{,}4871$

Dengan menggunakan interpolasi lagrange

$$y(x) = \frac{(301-304)(301-305)(301-307)}{(300-304)(300-305)(300-307)}2{,}4771 +$$

$$\frac{(301-300)(301-305)(301-307)}{(304-300)(304-305)(304-307)}2{,}4829 +$$

$$\frac{(301-300)(301-304)(301-307)}{(305-300)(305-304)(305-307)}2{,}4843 +$$

$$\frac{(301-300)(301-304)(301-305)}{(307-301)(307-304)(307-305)}2{,}4871$$

$$= 1{,}2739 + 4{,}9658 - 4{,}4717 + 0{,}7106$$

$$y(x) = 2{,}4786$$

Polinom Newton

- Polinom Lagrange kurang disukai dalam praktek karena :
  - Jumlah komputasi yang dibutuhkan untuk satu kali interpolasi adalah besar. Interpolasi untuk nilai x yang lain memerlukan jumlah komputasi yang sama karena tidak ada bagian komputasi sebelumnya yang dapat digunakan.
  - Bila jumlah titik data meningkat atau menurun, hasil komputasi sebelumnya tidak dapat digunakan. Karena tidak ada hubungannya antara $p_{n-1}(x)$ dan $p_n(x)$ pada polinom Lagrange
- Polinom yang dibentuk sebelumnya dapat digunakan untuk membentuk polinom derajat yang lebih tinggi.

Polinom Newton

- Persamaan Polinom Linier

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

- Bentuk pers ini dapat ditulis :

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

- Yang dalam hal ini

$$a_0 = y_0 = f(x_0) \qquad (1)$$

- Dan

$$a_1 = \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} \qquad (2)$$

- Pers ini mrpk bentuk selish terbagi (divided-difference)

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

Polinom Newton

- Polinom kuadratik $p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$

- Atau $$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

- Dari pers ini menunjukkan bahwa $p_2(x)$ dapat dibentuk dari pers sebelumnya $p_1(x)$. Nilai a_2 dapat ditemukan dengan mengganti $x=x_2$ untuk mendapatkan (3)

$$a_2 = \frac{f(x_2) - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

- Nilai a_0 dan a_1 pada pers 1 dan 2 dimasukkan pada pers 3

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_1}$$

Polinom Newton

- Dengan melakukan utak-atik aljabar, pers ini lebih disukai

$$a_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

Polinom Newton

- Jadi tahapan pembentukan polinom Newton :

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$p_3(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Polinom Newton

- Nilai konstanta a_0, a_1, a_2,…, a_n, merupakan nilai selisih terbagi , dg nilai

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_1, x_0]$$

$$a_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$a_n = f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

- Yang dalam hal ini

$$f[x_i, x_j] = \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j}$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k}$$

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1, x_0)}{x_n - x_0}$$

Karena a0, a1,a2, …an, merupakan nilai selisih terbagi, maka polinom Newton dinamakan polinom interpolasi selisih terbagi Newton. Nilai selisih terbagi dapat dihitung dengan menggunakan tabel yng disebut tabel selisih terbagi.

i	x_i	$f(x_i)$	Pertama	Kedua	Ketiga
0	x_0	$f(x_0)$	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1, x_0]$
1	x_1	$f(x_1)$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	
2	x_2	$f(x_2)$	$f[x_3, x_2]$		
3	x_3	$f(x_3)$			

Polinom Newton

- Dengan demikian polinom Newton dapat ditulis dalam hub rekursif sebagai :
  - Rekurens

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})\, f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

  - basis $\quad p_0(x) = f(x_0)$
- Atau dalam bentuk polinom yang lengkap sbb :

$$p_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_1, x_0] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_2, x_1, x_0]$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0]$$

Contoh Soal :

- Bentuklah polinom Newton derajat satu, dua, tiga dan empat yang menghampiri f(x)=cos(x) dalam range[0.0, 4] dan jarak antar titik adalah 1.0. Lalu taksirlah f(x) dengan x=2.5 dengan Polinom Newton derajat 3.

x_i	y_i	ST-1	ST-2	ST-3	ST-4
0.0	1	-0.4597	-0.2484	0.1466	-0.0147
1.0	0.5403	-0.9564	0.1913	0.0880	
2.0	-0.4161	-0.5739	0.4551		
3.0	-0.99	0.3363			
4.0	-0.6536				

Contoh Soal :

- Contoh cara menghitung nilai selisih terbagi pada tabel :

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{0.5403 - 1}{1 - 0} = -0.4597$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{-0.4161 - 0.5403}{2 - 1} = -0.9564$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{(x_2 - x_0)} = \frac{-0.9564 + 0.4597}{2 - 0} = -0.2484$$

Contoh Soal :

- Maka polinom Newton derajat 1,2 dan 3 dengan x_0 = 0 sebagai titik pertama :

$$\cos(x) \approx p_1(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0)$$

$$\cos(x) \approx p_2(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0)$$

$$\cos(x) \approx p_3(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)$$

$$\cos(x) \approx p_4(x) = 1.0 - 0.4597(x - 0.0) - 0.2484(x - 0.0)(x - 1.0) +$$
$$0.1466(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0) - 0.0147(x - 0.0)(x - 1.0)(x - 2.0)(x - 3.0)$$

- Nilai sejati f(2.5) adalah
  - F(2.5) = cos(2.5)=-0.8011