Transformasi Linear

Definisi

Misalkan V, W suatu ruang vektor atas sebuah field.

T: $V \rightarrow W$ suatu fungsi.

T disebut ***transformasi linear*** jika untuk u, $v \in V$ dan k skalar berlaku

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(ku) = kT(v)$

Contoh

1. Suatu transformasi T: $\Re^3 \rightarrow \Re^3$ didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

untuk setiap $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \Re^3$.

Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ akan ditransformasikan oleh T menjadi vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, karena

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2-(-3) \\ (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ disebut ***peta*** dari vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ oleh transformasi T.

Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ disebut ***prapeta*** dari vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oleh transformasi T.

Apakah transformasi T merupakan transformasi linear?
Misalkan u, $v \in \Re^3$ dan k skalar.

Karena $u \in \Re^3$ maka $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, karena $v \in \Re^3$ maka $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ dengan $u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in \Re$.

1. $T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)$

$$= T\left(\begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+v_1)+(u_2+v_2) \\ (u_2+v_2)-(u_3+v_3) \\ (u_3+v_3)^2 \end{pmatrix}$$

Sedangkan $T(u)+T(v) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}\right) + T\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)$

$$= \begin{pmatrix} u_1+u_2 \\ u_2-u_3 \\ u_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1+v_2 \\ v_2-v_3 \\ v_3^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_1+u_2)+(v_1+v_2) \\ (u_2-u_3)+(v_2-v_3) \\ u_3^2+v_3^2 \end{pmatrix}$$

Ternyata $T(u+v) \neq T(u)+T(v)$, sehingga T bukan transformasi linear.

2. Suatu transformasi T: $\Re^2 \rightarrow \Re$ didefinisikan sebagai

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 + x_2$$

untuk setiap $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \Re^2$.

a. Tentukan hasil transformasi dari $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ terhadap T.

b. Tentukan apakah T merupakan transformasi linear.

Jawab

a. $T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 2+1 = 3$

$T\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = -1+4 = 3$

b. Misalkan u, $v \in \Re^2$ dan k skalar.

Karena $u \in \Re^2$ maka $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, karena $v \in \Re^2$ maka $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

$$T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= u_1+v_1+u_2+v_2$$

$$= (u_1+u_2)+(v_1+v_2)$$

$$= T(u)+T(v)$$

Sedangkan

$$T(ku) = T\left(k\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= T\left(\begin{pmatrix} ku_1 \\ ku_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= ku_1 + ku_2$$

$$= k(u_1+u_2)$$

$$= kT\left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= kT(u)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa T merupakan transformasi linear.

Teorema

Misalkan $T: V \to W$ suatu transformasi linear, maka untuk $\forall u, v \in V$ berlaku

1. $T(0) = 0$
2. $T(-u) = -T(u)$
3. $T(u - v) = T(u) - T(v)$

Bukti

1. $T(u) = T(u + 0)$
   $= T(u) + T(0)$
2. $T(u) + T(-u) = T\big(u + (-u)\big)$
   $= T(0)$
3. $T(u - v) = T\big(u + (-v)\big)$
   $= T(u) + T(-v)$
   $= T(u) - T(v)$

Definisi

Misalkan $T: V \to W$ suatu transformasi linear maka himpunan

$$Im(T) = \{w | w = T(v), v \in V\}$$

yang merupakan himpunan bagian dari W, disebut **Ruang Peta (Image)** dari transformasi linear T.

Sedangkan himpunan

$$Ker(T) = \{v | v \in V, T(v) = 0\}$$

yang merupakan himpunan bagian dari V, disebut **Ruang Nol (Kernel)** dari transformasi linear T.

Teorema

$Im(T)$ dan $Ker(T)$ masing-masing merupakan subruang dari W dan V.

Bukti

Masing-masing dari $Im(T)$ dan $Ker(T)$ merupakan himpunan bagian dari dari W dan V.

Pada $Im(T)$ akan ditunjukkan bahwa $\forall w_1, w_2 \in Im(T)$ dan k suatu skalar berlaku

a. $w_1 + w_2 \in Im(T)$
b. $kw_1 \in Im(T)$

Yaitu misalkan $w_1, w_2 \in Im(T)$, dan k suatu skalar.

Karena $w_1 \in Im(T)$ maka akan ada suatu $v_1 \in V$ yang merupakan prapeta dari w_1. Sehingga dapat ditulis

$$w_1 = T(v_1)$$

Begitu pula untuk $w_2 \in Im(T)$ maka akan ada suatu $v_2 \in V$ yang merupakan prapeta dari w_2. Sehingga dapat ditulis

$$w_2 = T(v_2)$$

maka

$$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2).$$

Terlihat bahwa $w_1 + w_2$ merupakan hasil dari peta $v_1 + v_2 \in V$, sesuai definisi $Im(T)$, maka $w_1 + w_2 \in Im(T)$. *syarat a terpenuhi

Sedangkan

$$kw_1 = kT(v_1) = T(kv_1)$$

Terlihat bahwa kw_1 merupakan hasil peta dari $kv_1 \in V$, sesuai sesuai definisi $Im(T)$, maka $kw_1 \in Im(T)$. *syarat b terpenuhi

Pada $Ker(T)$ akan ditunjukkan bahwa $\forall v_1, v_2 \in Ker(T)$ dan k suatu skalar berlaku

a. $v_1 + v_2 \in Ker(T)$
b. $kv_1 \in Ker(T)$

Yaitu misalkan $v_1, v_2 \in Ker(T)$, dan k suatu skalar.

Karena $v_1 \in Ker(T)$ maka $T(v_1) = 0$ begitu pula untuk $v_2 \in Ker(T)$ maka $T(v_2) = 0$ sehingga

$$T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0 + 0 = 0$$

Terlihat bahwa $v_1 + v_2$ dipetakan ke 0, sesuai definisi $Ker(T)$, maka $v_1 + v_2 \in Ker(T)$. *syarat a terpenuhi

Sedangkan

$$T(kv_1) = kT(v_1) = k0 = 0$$

Terlihat bahwa kv_1 dipetakan ke 0, sesuai definisi $Ker(T)$, maka $kv_1 \in Ker(T)$. *syarat b terpenuhi

Misalkan $T: R^n \to R^m$ suatu transformasi vektor linear.

$\{e_i\}, i = 1,2, \dots, n$ adalah basis natural dari R^n.

$\{\varepsilon_i\}, i = 1,2, \dots, m$ adalah basis natural dari R^m.

$T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n)$ adalah vektor-vektor di R^m sehingga masing-masing mereka merupakan kombinasi linear dari $\{\varepsilon_i\}$.

Yaitu

$$T(e_1) = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{m1}\varepsilon_m$$

$$T(e_2) = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{m2}\varepsilon_m$$

$$\dots$$

$$T(e_n) = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{mn}\varepsilon_m$$

Sehingga

$$\begin{bmatrix} T(e_1) \\ T(e_1) \\ \vdots \\ T(e_n) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \ddots & \ddots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\text{Matriks Koefisien}} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

Transpose dari matriks koefisien di atas disebut ***Matriks Representasi*** atau disebut juga ***Matriks Transformasi*** dari transformasi linear T, relatif terhadap basis natural $\{e_i\}$ dan $\{\varepsilon_i\}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & \ddots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \textbf{Matriks Transformasi}$$

Contoh

Didefinisikan suatu transformasi linear $T: R^3 \to R^3$

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

Tentukan matriks transformasi dari T, lalu tentukan peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Jawab

Menentukan matriks transformasi dari T artinya menentukan peta dari vektor-vektor basis terhadap transformasi linear T tersebut.

$$T(e_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(e_2) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(e_3) = T\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sekarang susun $T(e_1), T(e_2), T(e_3)$ secara kolom, maka akan didapatkan matriks transformasi dari T.

$$[T]_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sedangkan peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ adalah perkalian $[T]_e$ dengan vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$T\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian peta dari vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ terhadap transformasi linear T adalah vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.