Dimensi dan Basis

Definisi

Suatu himpunan vektor-vektor {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$} disebut ***sistem pembentuk*** dari ruang vektor V, ditulis $V = L\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ jika setiap vektor v V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$}.

Contoh:

Vektor-vektor $\boldsymbol{a}$ = [2, 1, 0], $\boldsymbol{b}$ = [3, 2, 1], $\boldsymbol{c}$ = [5, 3, 1] adalah pembentuk ruang vektor $L\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.

Apakah vektor $\boldsymbol{d}$ = [1, 1, 1] $\boldsymbol{L}$?

Akan diperiksa apakah vektor $\boldsymbol{d}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari {$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$}.

$$\boldsymbol{d} = \lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c}$$

$$[1, 1, 1] = \lambda_1[2, 1, 0] + \lambda_2[3, 2, 1] + \lambda_3[5, 3, 1]$$

diperoleh

$$2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 1$$

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 = 1$$

Dengan menggunakan eliminasi pada ketiga persamaan di atas diperoleh $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$. Jadi, $\boldsymbol{d}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari {$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$} sehingga $\boldsymbol{d}$ = [1, 1, 1] $\boldsymbol{L}$.

Definisi

Suatu ruang vektor V dikatakan ber***dimensi*** n jika dapat diperoleh suatu himpunan n vektor-vektor V yang bebas linier, sedangkan setiap himpunan (n + 1) vektor-vektor V selalu bergantung linier, dengan perkataan lain, banyaknya maksimum vektor-vektor V yang bebas linier adalah n.

Teorema

Setiap n vektor-vektor {$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_n$} yang bebas linier dari V, ruang vektor berdimensi n, pasti merupakan sistem pembentuk dari V.

Contoh:

Tentukan dimensi dari ruang vektor yang dibentuk oleh:

(i) $\boldsymbol{p}$ = [1, -2, 3, 1] dan $\boldsymbol{q}$ = [2, -4, 5, 2]

(ii) $\boldsymbol{u}$ = [5, 7, 11, 4] dan $\boldsymbol{v}$ = [10, 14, 22, 8]

Penyelesaian:

(i) Kedua vektor tidak berkelipatan sehingga sistem pembentuknya bebas linier. Jadi, dimensi dari $L\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}\}$ adalah 2.

(ii) Vektor $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \neq 0$ dan $\boldsymbol{v} \neq 0$ sehingga {$\boldsymbol{u}$} atau {$\boldsymbol{v}$} merupakan sistem pembentuk yang bebas linier. Jadi, dimensinya adalah 1.

Definisi

Setiap sistem pembentuk yang bebas linier disebut ***basis*** dari ruang vektor tersebut. Setiap himpunan n vektor-vektor yang bebas linier $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n\}$ dari ruang vektor berdimensi n, disebut ***basis*** dari ruang vektor.

Contoh:
Tentukan dimensi dan basis dari ruang vektor yang dibentuk oleh:
(i) $\boldsymbol{a} = [1, 1, 2]$, $\boldsymbol{b} = [1, 2, 5]$, dan $\boldsymbol{c} = [5, 3, 4]$
(ii) $\boldsymbol{p} = [1, 2, 2]$, $\boldsymbol{q} = [2, 4, 4]$, dan $\boldsymbol{r} = [1, 0, 1]$
(iii) $\boldsymbol{u} = [1, 0, 1]$, $\boldsymbol{v} = [3, 0, 3]$, dan $\boldsymbol{w} = [2, 0, 2]$
(iv) $\boldsymbol{r} = [1, 0, 0]$, $\boldsymbol{s} = [1, 1, 0]$, dan $\boldsymbol{t} = [1, 1, 1]$

Penyelesaian:

(i) Akan diperiksa apakah $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ bebas linier.

$$\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b} + \lambda_3\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1[1, 1, 2] + \lambda_2[1, 2, 5] + \lambda_3[5, 3, 4] = [0, 0, 0]$$

diperoleh

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$$
$$2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0$$

Dengan menggunakan eliminasi diperoleh $\lambda_1 = -7\lambda_3$, $\lambda_2 = 2\lambda_3$. Misalkan $\lambda_3 = 1$, maka $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = 2$. Jadi, $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ bergantung linier.
Selanjutnya, akan dicari banyak maksimum di antara $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ yang bebas linier. Vektor $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ atau $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ atau $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ bebas linier sehingga dimensinya adalah 2. Basisnya dapat dipilih di antara $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ atau $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ atau $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$.

(ii) Karena $\boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{p}$ maka $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ bergantung linier.
Vektor $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\}$ atau $\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$ bebas linier sehingga dimensinya adalah 2. Basisnya dapat dipilih di antara $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}\}$ atau $\{\boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}\}$.

(iii) Ketiga vektor saling berkelipatan, sehingga hanya satu vektor yang bebas linier. Jadi, dimensinya adalah 1. Basisnya dapat dipilih $\{\boldsymbol{u}\}$ atau $\{\boldsymbol{v}\}$ atau $\{\boldsymbol{w}\}$.

(iv) Akan diperiksa apakah $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ bebas linier.

$$\lambda_1\boldsymbol{r} + \lambda_2\boldsymbol{s} + \lambda_3\boldsymbol{t} = \mathbf{0}$$

$$\lambda_1[1, 0, 0] + \lambda_2[1, 1, 0] + \lambda_3[1, 1, 1] = [0, 0, 0]$$

diperoleh $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sehingga $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ bebas linier. Jadi, dimensinya adalah 3 dan basisnya adalah $\{\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$.

Catatan:
Karena vektor-vektor V tak berhingga banyaknya, kecuali ruang vektor yang dibentuk oleh vektor nol sendiri, yaitu $L\{0\}$, dan misalnya dimensi V berhingga = n, maka dapat dicari banyak sekali himpunan n vektor-vektor V yang bebas linier. Jadi dapat dipilih banyak basis untuk V.

Contoh:

Misalkan $S = \{\boldsymbol{a} = [1, 1, 1], \boldsymbol{b} = [2, 1, 1], \boldsymbol{c} = [3, 2, 2]\}$.
S membentuk ruang vektor $L(S) = L\ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.
$S = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ adalah sistem pembentuk dari L.
Terlihat bahwa $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, jadi $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ bergantung linier. Sedangkan $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ bebas linier karena tidak berkelipatan.
Jadi, adalah sistem pembentuk yang bebas linier berarti basis dari L, sehingga dimensi dari L adalah 2.
Basis lain dari L yaitu himpunan 2 vektor L yang bebas linier, misalnya $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}\}$ atau $\{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ ataupun yang lain dari $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ atau $\boldsymbol{c}$.
Misalnya: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 0\boldsymbol{c} = [3, 2, 2]$ L, $\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{c} = [11, 6, 6]$ L sehingga $\{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$ bebas linier. Jadi, $\{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}$ juga basis dari L.

Catatan:
$L\{0\}$, ruang vektor yang dibentuk oleh vektor nol, hanya beranggotakan vektor nol saja, 0 bergantung linier, jadi vektor yang bebas linier $L\{0\}$ tidak ada, berarti dimensi $L\{0\} = 0$.
Dimensi dari ruang vektor R^n adalah n.
Hal ini karena dapat ditemukan n vektor-vektor satuan : $E = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n\}$ dengan $\boldsymbol{e}_1 = [1, 0, ..., 0]$, $\boldsymbol{e}_2 = [0, 1, ..., 0]$, ..., $\boldsymbol{e}_n = [0, 0, ..., 1]$.

Contoh:
Vektor $\boldsymbol{a} = [1, -1, 2, 3]$ R^4 dapat ditulis sebagai kombinasi linier basis E sebagai berikut:
$\boldsymbol{a} = [1, -1, 2, 3] = 1[1, 0, 0, 0] - 1[0, 1, 0, 0] + 2[0, 0, 1, 0] + 3[0, 0, 0, 1] = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_3 + 3\boldsymbol{e}_4$

Catatan:
Jika L ruang vektor bagian dari V maka dimensi $L \leq$ dimensi V. Jika dimensi L = dimensi V, berarti $L = V$.
Setiap satu vektor tidak sama dengan nol R^3 merupakan sistem pembentuk ruang vektor bagian berdimensi 1. Jadi, jika $\boldsymbol{a} \neq 0$, maka $L\{\boldsymbol{a}\}$ adalah garis lurus dengan persamaan $x = \lambda\boldsymbol{a}$.
Setiap dua vektor yang bebas linier (tidak berkelipatan/tidak segaris) akan membentuk ruang vektor bagian berdimensi 2, yang merupakan bidang rata $L\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ yang persamaannya $x = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b}$.

Contoh:
Akan diperiksa apakah titik-titik A(3, 1, 2), B(1, 2, 2), C(-1, 3, 2) segaris (kolinier).
Maka akan diperiksa apakah vektor **AB** dan **AC** berkelipatan.
AB = [-2, 1, 0] dan **AC** = [-4, 2, 0]. Jelas bahwa **AC** = 2**AB.** Jadi, A, B, C segaris.