DETERMINAN & INVERS MATRIKS

Matematika Lanjut 1

Onggo Wiryawan

DETERMINAN

- Setiap matriks persegi atau bujur sangkar memiliki nilai determinan
- Nilai determinan ➔ skalar
- Matriks Singular= Matriks yang determinannya bernilai 0

DETERMINAN

- Misalkan A suatu matriks bujursangkar
  - Determinan dari A dinotasikan
    - det(A)
    - |A|
- Untuk matriks ordo 2×2
  - Misal $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
  - Maka

$$\det(\mathrm{A}) = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

DETERMINAN

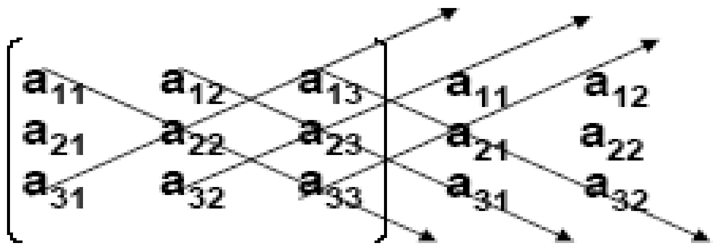
- Contoh
  - Misal $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$
  - Maka

$$\det(\mathrm{A}) = |A| = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 8 - (-3) \cdot (-5) = 1$$

DETERMINAN

- Untuk matriks ordo 3×3 (Metode Sarrus)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

DETERMINAN

- Contoh

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- det(A) = |A| =

  $= [(-2\cdot1 \cdot -1) + (2 \cdot3 \cdot2) + (-3 \cdot -1 \cdot0)] - (-3 \cdot1 \cdot2) -(-2 \cdot3 \cdot0)-(2 \cdot -1 \cdot -1)$

  $= 2 +12+0+6-0-2$

  $= 18$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Definisi 1: **Minor**
  - Misal $A_{n\times n}$ MINOR unsur a_{ij} adalah determinan yang berasal dari determinan orde ke-n tadi dikurangi dengan baris ke-i dan kolom ke-j.
  - Dinotasikan dengan M_{ij}
  - Contoh Minor dari elemen a_{11}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Minor-minor dari Matrik $A_{3\times3}$

$$|M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$|M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Definisi 2: **Kofaktor**
  - Misal $A_{n \times n}$ KOFAKTOR dari baris ke-i dan kolom ke-j dituliskan dengan
  - Dinotasikan dengan c_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Contoh
  - Kofaktor dari elemen a_{23}

$$c_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya

Ekspansi Baris

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}c_{in}$$

Ekspansi Kolom

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nj}c_{nj}$$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi ***kofaktor baris pertama***

- |A| $= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$

$$= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}|$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi ***kofaktor baris kedua***

- |A| $= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23}$

$$= a_{21}\left|M_{21}\right| - a_{22}\left|M_{22}\right| + a_{23}\left|M_{23}\right|$$

$$= a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

DETERMINAN MATRIKS 4×4 ATAU LEBIH BESAR

- Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi ***kofaktor kolom pertama***

- $$\begin{aligned} |A| &= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{21}|M_{21}| + a_{31}|M_{31}| \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

SIFAT DETERMINAN

Teorema

Misalkan A adalah matriks bujursangkar

Jika A memiliki satu baris nol atau kolom nol,maka

- det(A) = 0
- det(A) = det (A^T)

Teorema

Jika A adalah matriks segitiga $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah atau diagonal), maka det(A) adalah perkalian entri-entri pada diagonal utamanya

$$\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

SIFAT DETERMINAN

Teorema

Misalkan A adalah matriks bujursangkar

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian suatu baris atau kolom dengan skalar $k \neq 0$ maka

$$\det(B) = k \det(A)$$

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari pertukaran dua baris atau kolom dari A maka

$$\det(B) = -\det(A)$$

- Jika B adalah matriks yang dihasilkan ketika suatu baris ditambahkan dengan kelipatan baris lain atau suatu kolom ditambahkan dengan kelipatan kolom lain dari A, maka

$$\det(B) = \det(A)$$

SIFAT DETERMINAN

Contoh

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{31} & a_{12} + ka_{32} & a_{13} + ka_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

SIFAT DETERMINAN

Teorema

Misal E adalah matriks elementer ordo $n \times n$,

- Jika E dihasilkan dari suatu baris I_n dikali k, maka $\det(E) = k$
- Jika E dihasilkan dari pertukaran dua baris pada I_n, maka $\det(E) = -1$
- Jika E dihasilkan dari suatu baris ditambah kelipatan baris lain di I_n, maka $\det(E) = 1$

SIFAT DETERMINAN

Contoh

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

SIFAT DETERMINAN

Teorema

Jika A adalah matriks bujursangkar dimana terdapat dua baris atau dua kolom yang saling berkelipatan, maka

$$\det(A) = 0$$

SIFAT DETERMINAN

Contoh

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ -2 & 4 & 1\\ 5 & -2 & 2\end{vmatrix} \overset{B_2+2B_1}{=} \begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 5 & -2 & 2\end{vmatrix} \overset{B_3-5B_1}{=} \begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 13 & 2\end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 13 & 2\end{vmatrix} \overset{B_3-13B_2}{=} -2\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & \frac{17}{2}\end{vmatrix}$$

$$=(-2)(1)(1)\left(\frac{17}{2}\right)=-17$$

SIFAT DETERMINAN

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} \overset{C_4 - 3C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{vmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546$$

SIFAT DETERMINAN

Teorema

Jika A dan B adalah matriks bujursangkar dengan ukuran sama, maka

$$\det(AB) = \det(A).\det(B)$$

Teorema

Jika A invertible, maka

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

MATRIKS KOFAKTOR

Definisi

Jika $A_{n\times n}$, C_{ij} kofaktor dari a_{ij}, maka

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A.

Transposenya disebut matriks Adjoin dari A, ditulis Adj(A).

MATRIKS KOFAKTOR

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Kofaktor dari A

$C_{11} = 12$, $C_{21} = 4$, $C_{31} = 12$,
$C_{12} = 6$, $C_{22} = 2$, $C_{32} = -10$,
$C_{13} = -16$, $C_{23} = 16$, $C_{33} = 16$

- Maka matriks kofaktor dari A adalah

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

ATURAN CRAMER

Teorema

- Jika A adalah matriks invertible, maka

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{Adj}(A)$$

Teorema (Aturan Cramer)

- Jika $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ adalah spl dengan n peubah, $\det(A) \neq 0$ maka spl mempunyai solusi tunggal

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

- dimana A_i adalah matriks A dengan kolom ke-i diganti dengan **b**

ATURAN CRAMER

Contoh

Tentukan solusi dari spl

$$2x_1 - 3x_2 = 6$$
$$4x_1 + x_2 = 25$$

Jawab

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

ATURAN CRAMER

Matriks Kofaktor dari A adalah = $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Adjoin A adalah Kofaktor^T = $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

Determinan A = $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-12) = 14$

SIFAT INVERS MATRIKS

Definisi

Misal $A_{n\times n}$, maka A^{-1} disebut invers matriks dari A jika

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = I$$

untuk I = matriks identitas ordo n×n.

Teorema

Misal matriks A dan B invertibel (punya invers).

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

SIFAT INVERS MATRIKS

Teorema

Misal matriks A invertibel

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

SELESAI

REFERENSI

- Rahmi Rusin, Determinan.
- UB Informatika, Matriks.