Sistem Persamaan Linier

1. Sistem Persamaan Linier

I.1 Persamaan Linier

Sembarang garis lurus pada bidang-xy dapat dinyatakan dalam persamaan berikut:

$$a_1 x + a_2 y = b$$

dimana a_1, a_2, b adalah bilangan real dan salah satu dari a_1, a_2 tidak nol.

Contoh :

- $3x = 9$ (titik pada garis x)
- $2x + y = 4$ (garis pada bidang-xy)
- $-2x + 4y - z = 10$ (bidang di ruang-xyz)

Carilah solusinya!

Bentuk Umum Persamaan Linier

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_1x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Dimana:

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: variabel

$a_1, a_2, \ldots, x_n$: koefisien

b: konstanta

Solusi dari persamaan linier tersebut adalah barisan n bilangan, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ yang memenuhi persamaan linier tersebut ketika disubstitusikan

$x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n.$

I.2 Sistem Persamaan Linier (SPL)

Himpunan berhingga dari persamaan linier dalam variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut dengan sistem persamaan linier (SPL) atau sistem linier.

Contoh:

- $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

Carilah solusinya!

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear (SPL)

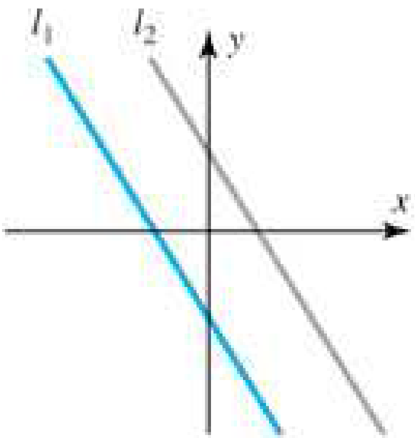
$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

SPL di atas, terdiri dari m persamaan linear dengan n buah variabel.

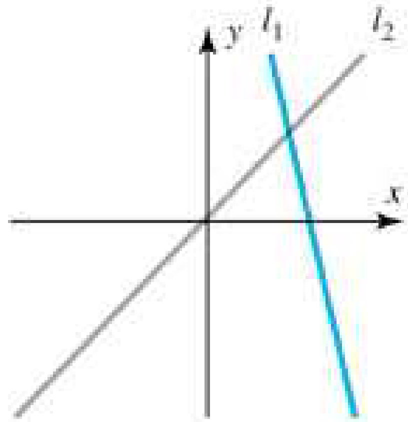
Contoh SPL yang terdiri dari 3 persamaan linear dengan 4 buah variabel:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3
\end{aligned}$$

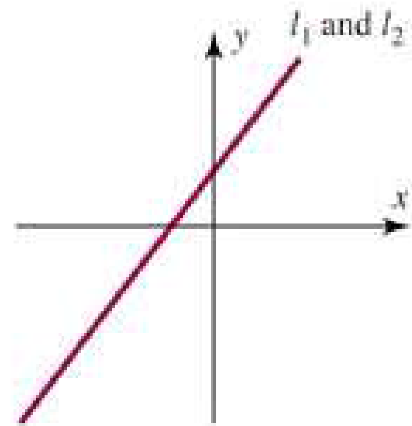
Solusi (SPL)memiliki tiga kemungkinan



(a) No solution



(b) One solution



(c) Infinitely many solutions

Setiap (SPL) tidak memiliki solusi, atau memiliki tepat satu solusi

atau memiliki tak hingga solusi .

- ❑ SPL yang tidak memiliki solusi dikatakan tak-konsisten
- ❑ SPL yang memiliki tepat satu solusi dikatakan konsisten

Augmented Matrix (Matriks yang diperbesar)

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix}$$

SPL

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Augmented Matrix

CONTOH :

$$\begin{vmatrix} x + y + 2z = 9 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Operasi Baris Elementer (OBE)

Operasi baris elementer (OBE) pada matriks yang diperbesar dari SPL:

1. Mengalikan suatu baris dengan bilangan tak-nol.
2. Menukar 2 baris
3. Menambahkan perkalian suatu baris ke baris lain.

Jika dilakukan dengan benar, OBE tidak mengubah solusi dari suatu SPL. Aman!

Latihan 1.
Tentukan yang termasuk persamaan linear!

(a) $x_1 + 5x_2 - \sqrt{2}x_3 = 1$

(b) $x_1 + 3x_2 + x_1x_3 = 2$

(c) $x_1 = -7x_2 + 3x_3$

(d) $x_1^{-2} + x_2 + 8x_3 = 5$

(e) $x_1^{3/5} - 2x_2 + x_3 = 4$

(f) $\pi x_1 - \sqrt{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 7^{1/3}$

Latihan 2.

Tentukan *augmented matrix dari* SPL berikut!

(a)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -1 \\ 4x_1 + 5x_2 &= 3 \\ 7x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 \phantom{{}-x_2} + 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 7 \\ 6x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \phantom{{}-x_4} - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 \phantom{{}+x_5} &= 1 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2+x_3} &= 1 \\ x_2 \phantom{{}+x_3} &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

2. Eliminasi Gauss

Johann Carl Friedrich Gauss, 1777 - 1855, matematikawan Jerman.

Metode Eliminasi Gauss merupakan

1. metode sistematis untuk

menyelesaikan SPL

2. mengubah matriks yang diperbesar

suatu SPL menjadi matriks eselon baris .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss-Jordan

Eliminasi Gauss-Jordan :

1 . metode sistematis untuk

menyelesaikan SPL

2. mengubah matriks yang

diperbesar suatu SPL menjadi

matriks eselon baris tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Wilhelm Jordan, 1842 - 1899, ahli Geodesi Jerman.

Matriks Eselon baris

- Baris-nol : baris yang seluruh angkanya adalah angka 0.
- Baris-tak-nol : baris yang mempunyai minimal 1 angka tak-nol.
- Matriks eselon baris:

  1. Jika suatu baris adalah baris-tak-nol, maka angka tak-nol pertama di baris tersebut harus angka 1. Angka 1 ini disebut satu-utama (leading 1).
  2. Baris-nol harus dikelompokkan di dasar matriks.
  3. Dalam 2 baris-tak-nol yang berurutan, satu-utama dalam baris yang lebih bawah harus terletak di sebelah kanan dari satu-utama baris yang lebih atas.

- Matriks eselon baris tereduksi: memenuhi sifat 1, 2, 3 ditambah

  4. Masing-masing kolom yang berisi satu-utama mempunyai angka 0 di baris lainnya dalam kolom tersebut.

Latihan 3.

Tentukan manakah yang termasuk matriks eselon baris tereduksi!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Latihan 4.

Selesaikan SPL berikut dengan metode eleminasi Gauss-Jordan!

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned}$$