

Beberapa Aplikasi Graf

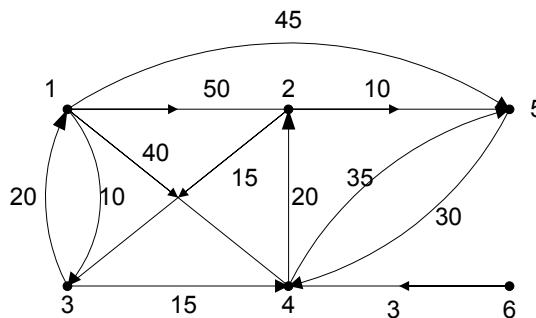
a. Lintasan Terpendek (*Shortest Path*)

- graf berbobot (*weighted graph*),
- lintasan terpendek: lintasan yang memiliki total bobot minimum.
- Contoh aplikasi:
 1. Menentukan jarak terpendek/waktu tempuh tersingkat/ongkos termurah antara dua buah kota
 2. Menentukan waktu tersingkat pengiriman pesan (*message*) antara dua buah terminal pada jaringan komputer.
- Terdapat beberapa jenis persoalan lintasan terpendek, antara lain:
 - a. Lintasan terpendek antara dua buah simpul tertentu.
 - b. Lintasan terpendek antara semua pasangan simpul.
 - c. Lintasan terpendek dari simpul tertentu ke semua simpul yang lain.
 - d. Lintasan terpendek antara dua buah simpul yang melalui beberapa simpul tertentu.

==> Di dalam kuliah ini kita memilih jenis persoalan 3.

Uraian persoalan

Diberikan graf berbobot $G = (V, E)$ dan sebuah simpul a . Tentukan lintasan terpendek dari a ke setiap simpul lainnya di G . Asumsi yang kita buat adalah bahwa semua sisi berbobot positif.



Simpul asal	Simpul tujuan	Lintasan terpendek	Jarak
1	3	1 → 3	10
1	4	1 → 3 → 4	25
1	2	1 → 3 → 4 → 2	45
1	5	1 → 5	45
1	6	tidak ada	-

- Algoritma menentukan lintasan terpendek yang terkenal: algoritma Dijkstra

Properti algoritma Dijkstra:

1. Matriks ketetanggaan $M[m_{ij}]$

m_{ij} = bobot sisi (i, j) (pada graf tak-berarah $m_{ij} = m_{ji}$)

$m_{ii} = 0$

$m_{ij} = \infty$, jika tidak ada sisi dari simpul i ke simpul j

2. Larik $S = [s_i]$ yang dalam hal ini,

$s_i = 1$, jika simpul i termasuk ke dalam lintasan terpendek

$s_i = 0$, jika simpul i tidak termasuk ke dalam lintasan terpendek

3. Larik/tabel $D = [d_i]$ yang dalam hal ini,

d_i = panjang lintasan dari simpul awal s ke simpul i

Algoritma Lintasan Terpendek Dijkstra

(Mencari lintasan terpendek dari simpul a ke semua simpul lain)

Langkah 0 (inisialisasi):

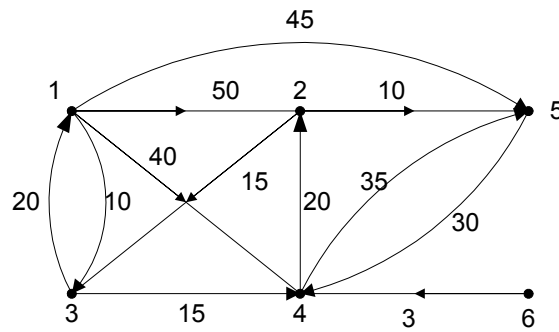
- inisialisasi $s_i = 0$ dan $d_i = m_{ai}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$

Langkah 1:

- isi s_a dengan 1 *(karena simpul a adalah simpul asal lintasan terpendek, jadi sudah pasti terpilih)*
- isi d_a dengan ∞ *(tidak ada lintasan terpendek dari simpul a ke a)*

Langkah 2, 3, ..., $n-1$:

- cari j sedemikian sehingga $s_j = 0$ dan $d_j = \min\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$
- isi s_j dengan 1
- perbarui d_i , untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dengan:
 d_i (baru) = $\min\{d_i$ (lama), $d_j + m_{ji}\}$.



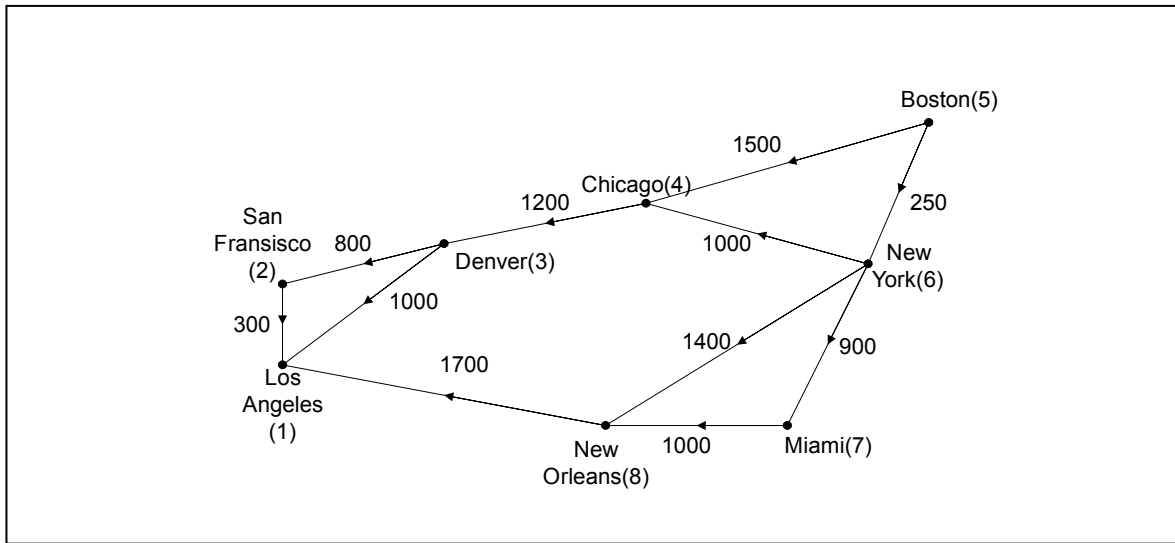
Tentukan lintasan terpendek dari simpul 1 ke semua simpul lain.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	S						D						
			1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	50	10	40	45	∞	
										(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
1	1	1	1	0	0	0	0	0	∞	50	10	40	45	∞	
										(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	
2	3	1, 3	1	0	1	0	0	0	∞	50	10	25	45	∞	
										(1,2)	(1,3)	(1,3,4)	(1,5)	(1,6)	
3	4	1, 3, 4	1	0	1	1	0	0	∞	45	10	25	45	∞	
										(1,3,4,2)	(1,3)	(1,3,4)	(1,4)	(1,6)	
4	2	1, 3, 4, 2	1	1	1	1	0	0	∞	45	10	25	45	∞	
										(1,3,4,2)	(1,3)	(1,3,4)	(1,4)	(1,6)	
5	5	1, 5	1	1	1	1	1	0	∞	45	10	25	45	∞	

Jadi, lintasan terpendek dari:

- 1 ke 3 adalah 1, 3 dengan panjang = 10
- 1 ke 4 adalah 1, 3, 4 dengan jarak = 25
- 1 ke 2 adalah 1, 3, 4, 2 dengan jarak = 45
- 1 ke 5 adalah 1, 5 dengan jarak = 45
- 1 ke 6 tidak ada

Contoh 6.34. Tinjau graf berarah pada Gambar 6.50 yang menyatakan jarak beberapa kota di Amerika Serikat.



Tentukan lintasan terpendek dari simpul 5 ke semua simpul lain.

Lelaran	Simpul yang dipilih	Lintasan	S								D							
			1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
Inisial	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0	∞	∞	∞	1500	0	250	∞	∞
1	5	5	0	0	0	0	1	0	0	0	∞	∞	∞	1500	∞	250	∞	∞
2	6	5, 6	0	0	0	0	1	1	0	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
3	7	5, 6, 7	0	0	0	0	1	1	1	0	∞	∞	∞	1250	∞	250	1150	1650
4	4	5, 6, 4	0	0	0	1	1	1	1	0	∞	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
5	8	5, 6, 8	0	0	0	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
6	3	5, 6, 4, 3	0	0	1	1	1	1	1	1	3350	∞	2450	1250	∞	250	1150	1650
7	2	5, 6, 4, 3, 2	0	1	1	1	1	1	1	1	3350	3250	2450	1250	∞	250	1150	1650

Jadi, lintasan terpendek dari:

- 5 ke 6 adalah 5, 6 dengan panjang = 250
- 5 ke 7 adalah 5, 6, 7 dengan jarak = 1150
- 5 ke 4 adalah 5, 6, 4 dengan jarak = 1250
- 5 ke 8 adalah 5, 6, 8 dengan jarak = 1650
- 5 ke 3 adalah 5, 6, 4, 3 dengan jarak = 2450
- 5 ke 2 adalah 5, 6, 4, 3, 2 dengan jarak = 3250
- 5 ke 1 adalah 5, 6, 8, 1 dengan jarak = 3350

b. Persoalan Perjalanan Pedagang (*Travelling Salesperson Problem - TSP*)

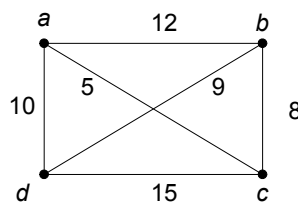
Diberikan sejumlah kota dan jarak antar kota. Tentukan sirkuit terpendek yang harus dilalui oleh seorang pedagang bila pedagang itu berangkat dari sebuah kota asal dan menyinggahi setiap kota tepat satu kali dan kembali lagi ke kota asal keberangkatan.

==> menentukan sirkuit Hamilton yang memiliki bobot minimum.

Aplikasi TSP:

1. Pak Pos mengambil surat di kotak pos yang tersebar pada n buah lokasi di berbagai sudut kota.
2. Lengan robot mengencangkan n buah mur pada beberapa buah peralatan mesin dalam sebuah jalur perakitan.
3. Produksi n komoditi berbeda dalam sebuah siklus.

Jumlah sirkuit Hamilton di dalam graf lengkap dengan n simpul: $(n - 1)!/2$.

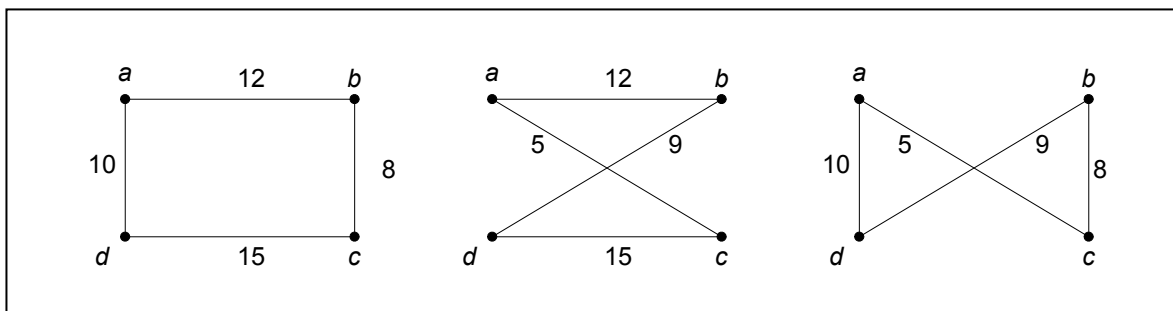


Graf di atas memiliki $(4 - 1)!/2 = 3$ sirkuit Hamilton, yaitu:

$I_1 = (a, b, c, d, a)$ atau $(a, d, c, b, a) \implies$ panjang = $10 + 12 + 8 + 15 = 45$

$I_2 = (a, c, d, b, a)$ atau $(a, b, d, c, a) \implies$ panjang = $12 + 5 + 9 + 15 = 41$

$I_3 = (a, c, b, d, a)$ atau $(a, d, b, c, a) \implies$ panjang = $10 + 5 + 9 + 8 = 32$



Jadi, sirkuit Hamilton terpendek adalah $I_3 = (a, c, b, d, a)$ atau (a, d, b, c, a) dengan panjang sirkuit = $10 + 5 + 9 + 8 = 32$.

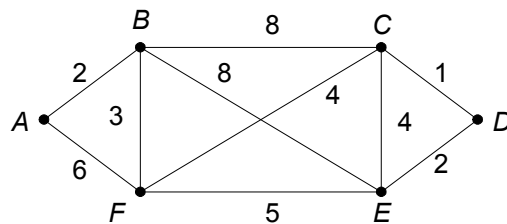
Jika jumlah simpul $n = 20$ akan terdapat $(19!)/2$ sirkuit Hamilton atau sekitar 6×10^{16} penyelesaian.

c. Persoalan Tukang Pos Cina (*Chinese Postman Problem*)

Dikemukakan oleh Mei Gan (berasal dari Cina) pada tahun 1962.

Masalahnya adalah sebagai berikut: *seorang tukang pos akan mengantarkan surat ke alamat-alamat sepanjang jalan di suatu daerah. Bagaimana ia merencanakan rute perjalanannya supaya ia melewati setiap jalan tepat sekali dan kembali lagi ke tempat awal keberangkatan.*

====> menentukan sirkuit Euler di dalam graf.



Lintasan yang dilalui tukang pos: $A, B, C, D, E, F, C, E, B, F, A$.