Graph

Matematika Informatika 4

Onggo Wiryawan

@OnggoWr

Definisi

- ***Graph*** adalah struktur diskrit yang mengandung ***vertex*** dan ***edge*** yang menghubungkan vertex-vertex tersebut.

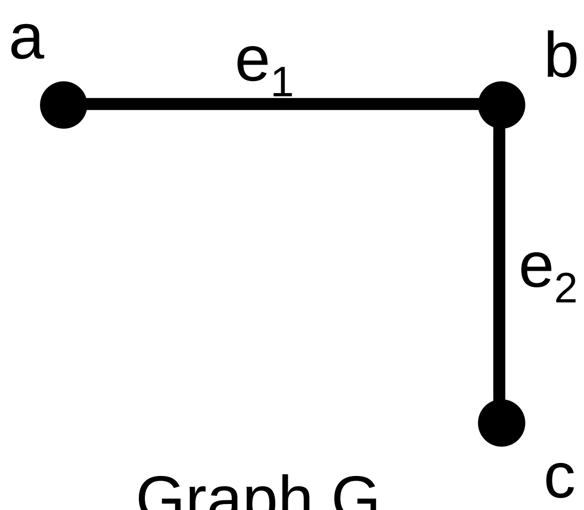
Jenis-jenis Graph

- **Definisi 1:**

  Suatu graph simple G(V,E) mengandung
  V, sebuah himpunan tak-kosong yang berisi *vertex-vertex*, dan
  E, sebuah himpunan berisi pasangan berurut dari anggota V yang berbeda, disebut dengan *edge*.

Jenis-jenis Graph

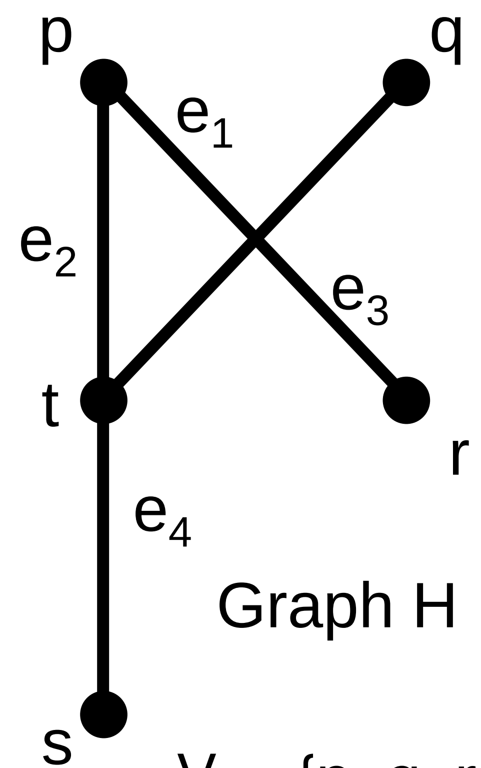
- **Contoh:**



Graph G

$V = \{a, b, c\}$

$E = \{e_1, e_2\}$



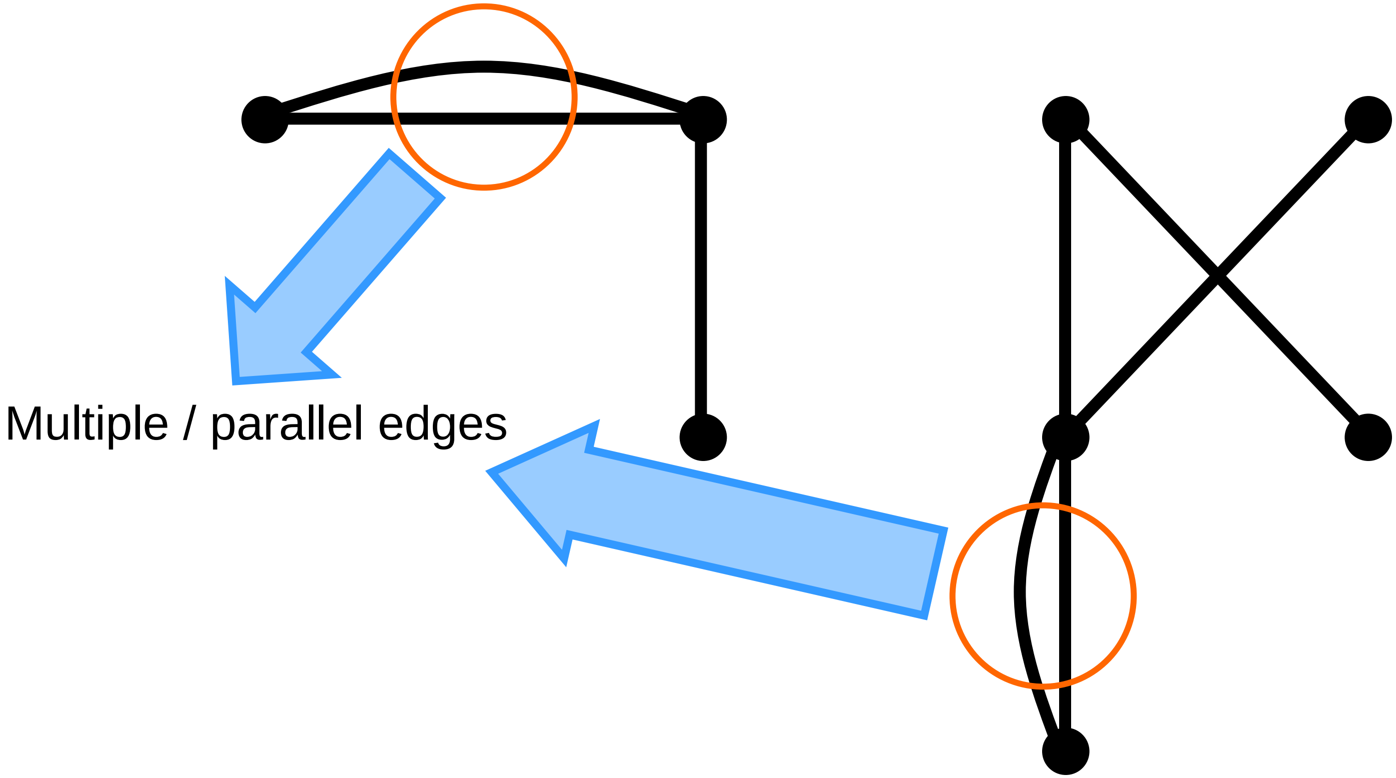
Graph H

$V = \{p, q, r, s, t\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

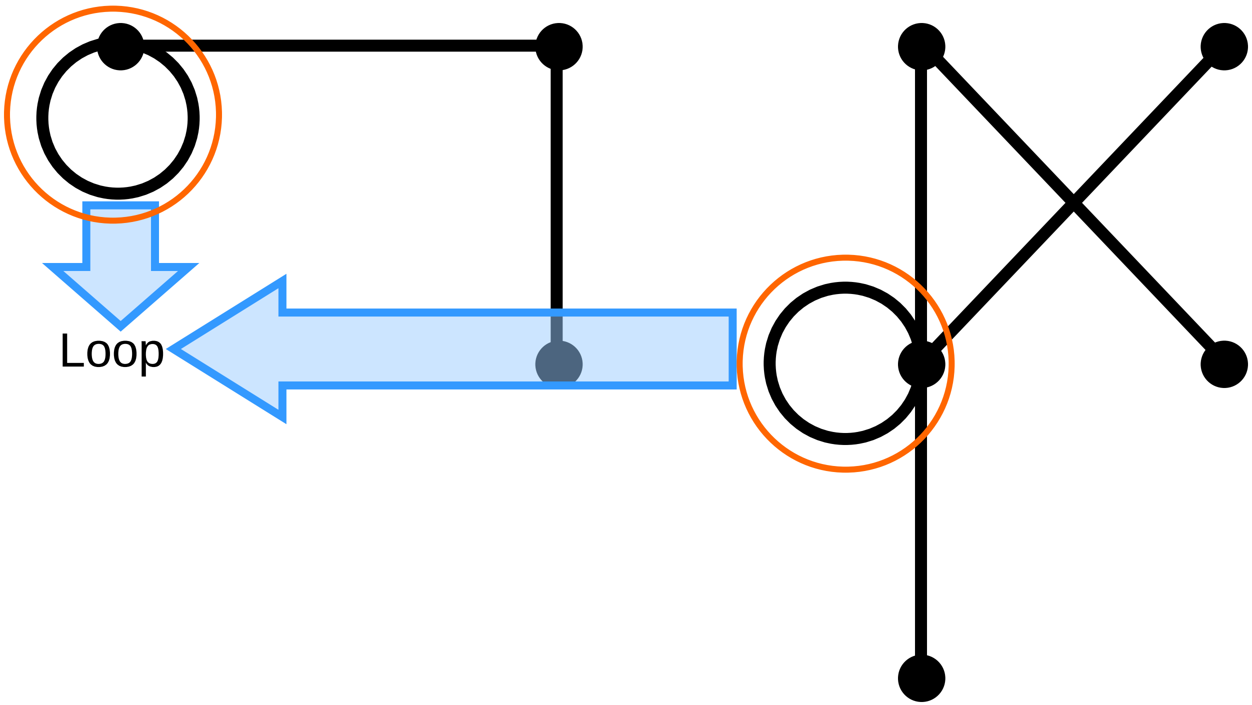
Jenis-jenis Graph

- **Contoh:**



Jenis-jenis Graph

- **Contoh :**



Istilah dalam Graph

- **Definisi 4:**

  Dua vertex u dan v dalam suatu graph G disebut ber***adjacent*** (atau bertetangga) di G jika
  {u, v} adalah suatu edge pada G.
  Jika e = {u, v}, maka edge e disebut ***incident dengan*** vertex u dan v.
  Edge e juga disebut menghubungkan u dan v.
  Vertex u dan v disebut ***endpoints*** dari edge {u, v}.

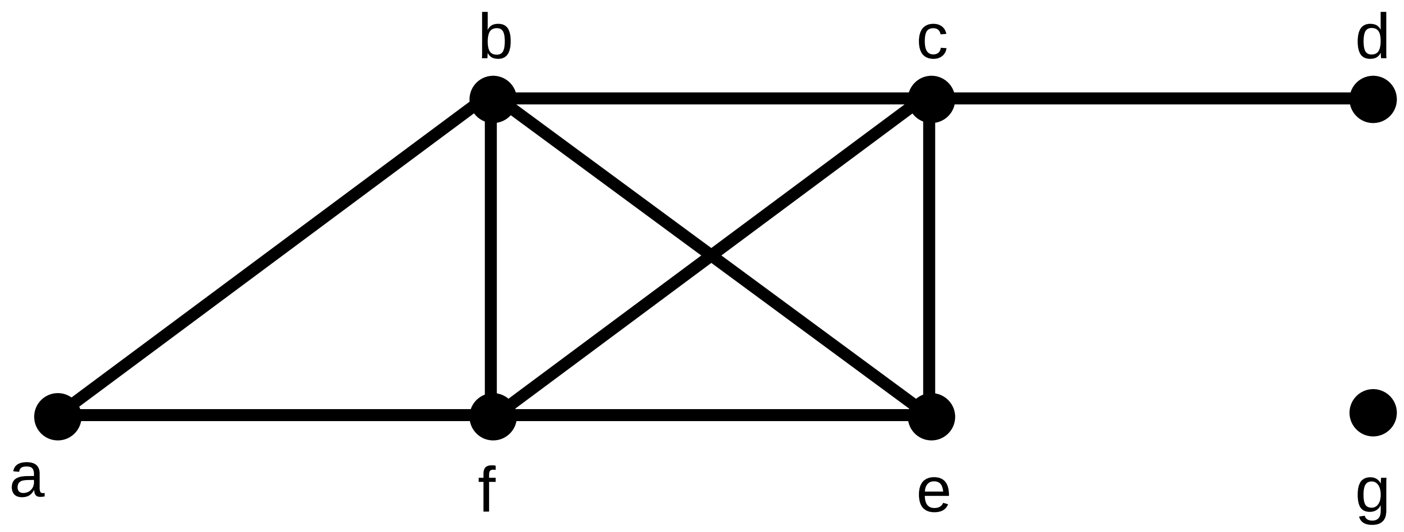
Istilah dalam Graph

- **Definisi 5:**

  Degree dari suatu vertex pada sebuah graph adalah banyaknya edge yang incident dengan vertex tersebut. Degree dari vertex v dinotasikan dengan ***deg*(*v*)**.

Istilah dalam Graph

- **Contoh:**



deg(a) = 2 deg(d) = 1 deg(g) = 0

deg(b) = 4 deg(e) = 3

deg(c) = 4 deg(f) = 4

Istilah dalam Graph

- **Teorema 1 *(The Handshaking Theorem)*:**

  Misalkan G = (V,E) adalah suatu graph dengan edge sebanyak e, maka

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

  yaitu jumlah dari degree setiap vertex sama dengan dua kali banyaknya edge pada graph tersebut.

Bukti:

  Karena setiap edge menghubungkan 2 vertex.

Istilah dalam Graph

- **Contoh :**

  Berapa banyak edge yang terdapat pada suatu graph dengan 10 vertex yang masing-masing berdegree 6 ?

  Jawab: karena jumlah dari degree vertex sebesar
  6•10 = 60, artinya
  2e = 60.
  e = 30.

  Sehingga, banyaknya edge pada graph tersebut adalah 30 edge.

Istilah dalam Graph

- **Teorema 2:**

  Suatu graph (tidak berarah) memiliki sejumlah genap vertex yang berdegree ganjil.

Bukti:

dari teorema 1,

$$2e = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

$$2e = \sum_{v \in V_1} \deg(v) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

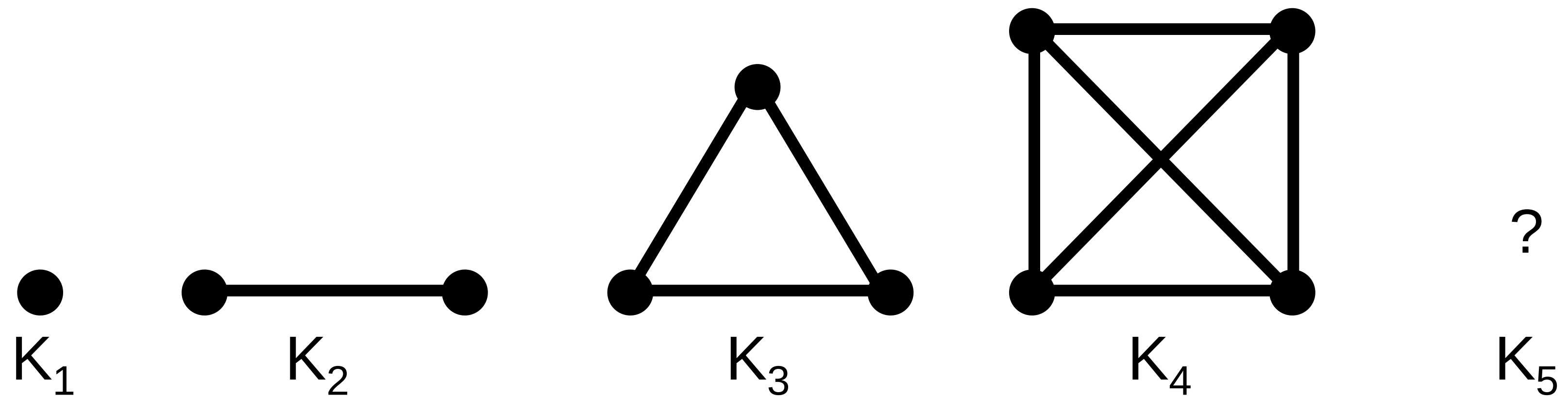
genap = [ganjil+…+ganjil] + [genap+…+genap]

agar persamaan ini berlaku, maka [ganjil+…+ganjil] harus ada sebanyak genap suku.

Beberapa Graph Simple Khusus

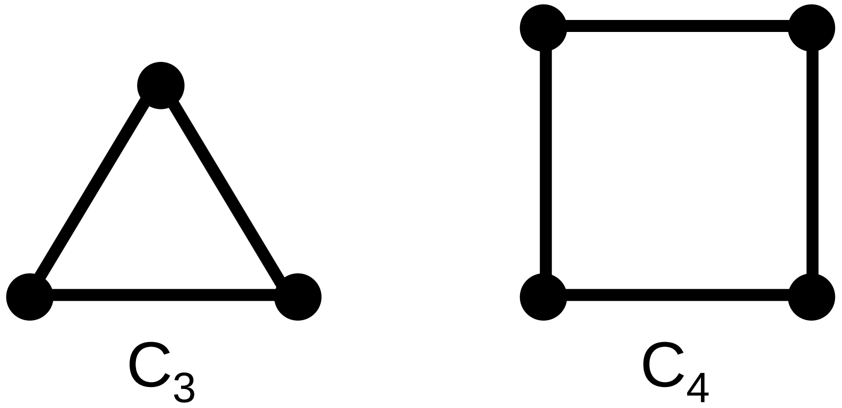
1. Graph Complete [K_n]

adalah graph simple yang mengandung tepat satu edge untuk setiap pasang vertex yang berbeda.



Beberapa Graph Simple Khusus

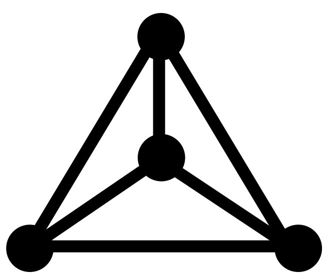
2. **Cycles [C_n, n ≥ 3]**
   graph ***cycles*** C_n, mengandung
   n vertex $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan
   edge $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$.



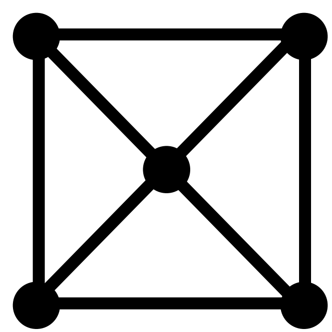
Beberapa Graph Simple Khusus

3. **Wheels [W_n, n ≥ 3]**

   graph ***wheel*** W_n, diperoleh dengan menambahkan sebuah vertex pada graph cycle C_n lalu menghubungkan vertex baru ini ke setiap vertex yang ada pada C_n, dengan menambahkan edge-edge baru.



W_3 C_3



W_4 C_4

Beberapa Graph Simple Khusus

4. **Bipartite Graph**

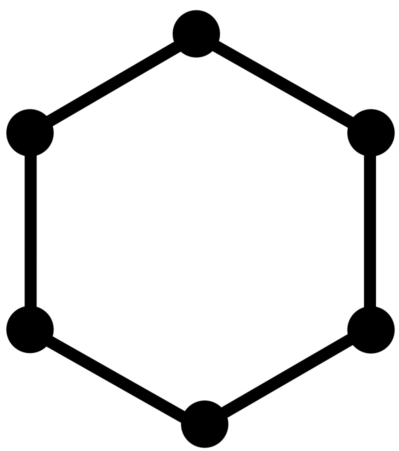
   suatu graph simple G = (V,E) disebut ***bipartite*** jika himpunan vertex V dapat dipartisi menjadi dua himpunan takkosong yang saling lepas V_1 dan V_2 sedemikian hingga setiap edge pada graph menghubungkan sebuah vertex di V_1 dan sebuah vertex di V_2 (tapi tidak ada edge yang di G yang menghubungkan setiap pasang vertex di masing-masing V_1 atau di V_2).

Beberapa Graph Simple Khusus

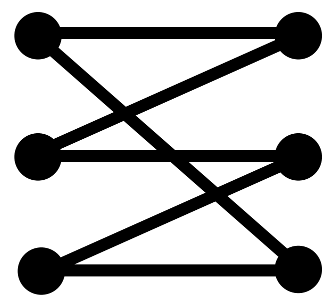
- **Contoh**

  Apakah C_6 bipartite?

  Ternyata, C_6 merupakan suatu graph bipartite.



C_6

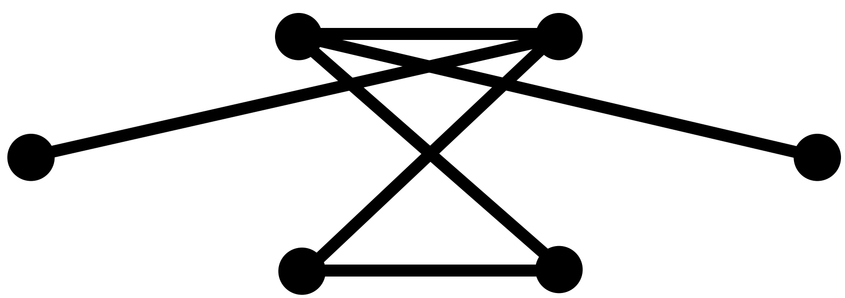


C_6

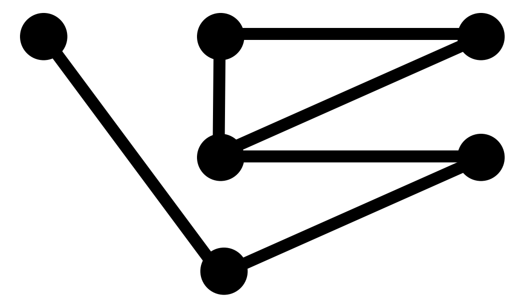
Beberapa Graph Simple Khusus

- **Exercise**

  Are the graphs G and H bipartite?



G



H

Beberapa Graph Simple Khusus

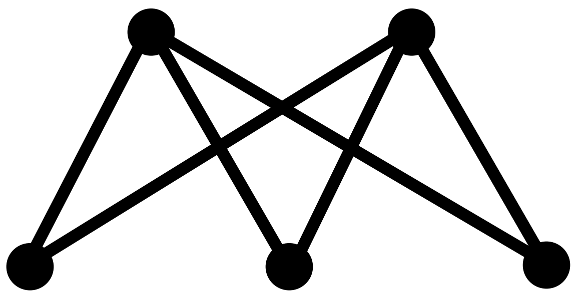
5. **Complete Bipartite Graph**

   Graph ***complete bipartite*** $\boldsymbol{K_{m,n}}$ adalah graph yang himpunan semua vertexnya terpartisi ke dalam dua subset. Sehingga ada sebuah edge yang menghubungkan dua vertex jika dan hanya jika vertex pertama terdapat di suatu subset dan vertex kedua di subset lainnya.

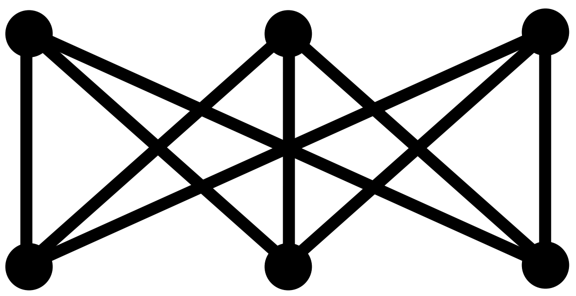
Beberapa Graph Simple Khusus

- **Contoh**

  Beberapa graph complete bipartite.



$K_{2,3}$



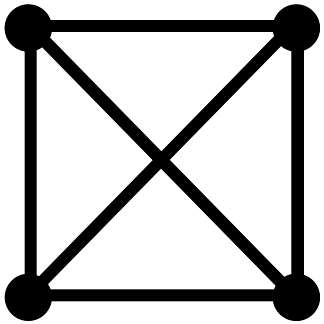
$K_{3,3}$

Modifikasi Graph

- **Definisi 1:**

  Suatu ***subgraph*** dari sebuah graph G = (V,E) adalah sebuah graph H = (W,F) dengan
  $W \subseteq V$ dan $F \subseteq E$.

  Contoh:



K_4

Sebuah subgraph dari K_4

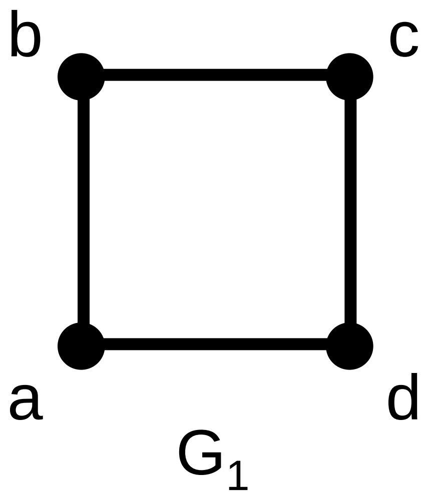
Modifikasi Graph

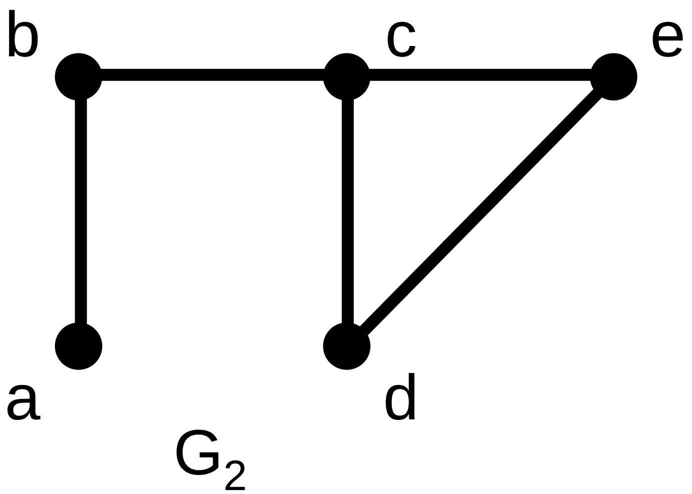
- **Definisi 2:**

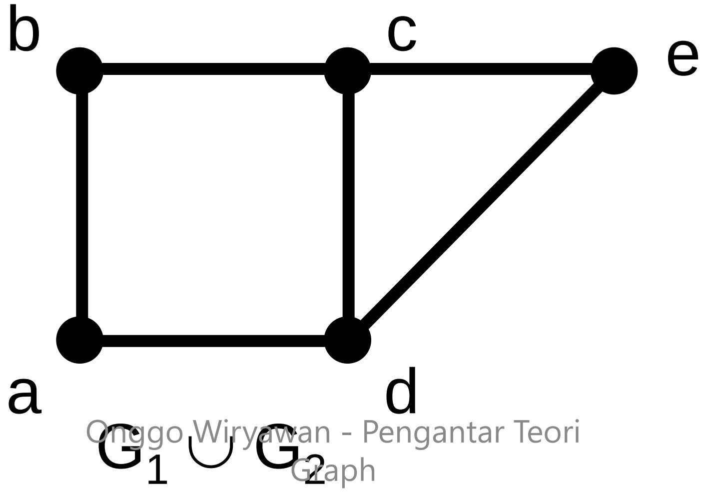
  Gabungan dari dua graph simple $G_1 = (V_1,E_1)$ dan $G_2 = (V_2,E_2)$ merupakan suatu simple graph dengan himpunan vertex $V_1 \cup V_2$ dan himpunan edge $E_1 \cup E_2$.
  Gabungan dari graph G_1 dan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \cup G_2$

Modifikasi Graph

- **Contoh**





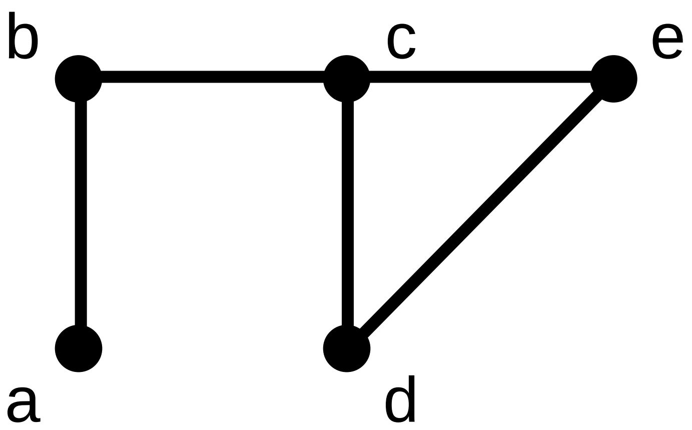


Representasi Graph dan Isomorfisma Graph

Daftar Adjacency

- **Contoh**

  Gunakan daftar adjacency untuk merepresentasikan simple graph G_1.



G_1

Vertex	Beradjacent dengan
a	b
b	a, c
c	b, d, e
d	c, e
e	c, d

Matriks Adjacency

- **Definisi 1:**

  Jika $A = [a_{ij}]$ merupakan suatu ***matrix adjacency*** dari graph G, maka

  a_{ij} = 1 jika $\{v_i, v_j\}$ adalah suatu edge di G

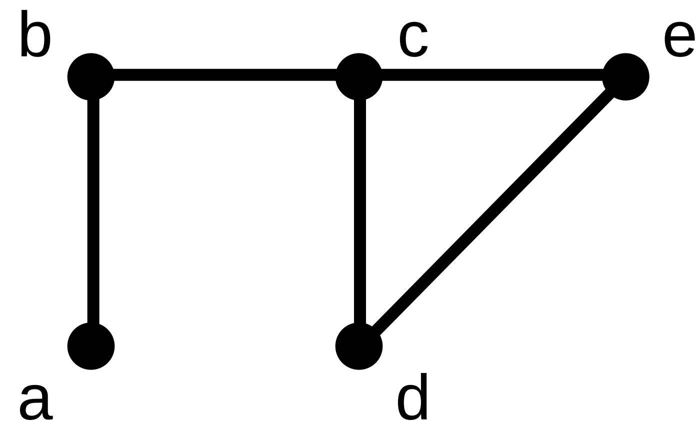
  = 0 lainnya

Matriks Adjacency

- **Contoh**

  Gunakan matriks adjacency untuk merepresentasikan graph G_1.

$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



G_1

Matriks Incidence

- **Definisi 2:**

  Jika M = [m_{ij}] merupakan ***matriks incidence*** dari graph G, maka

  m_{ij} = 1 jika edge e_j berincident dengan vertex v_i

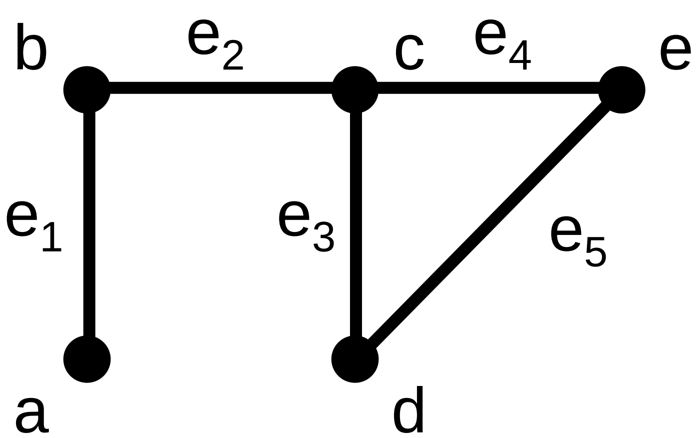
  = 0 lainnya

Matriks Incidence

- **Contoh**

  Gunakan matriks incidence untuk merepresentasikan graph G_1.

$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



G_1

Path & Circuit

- **Definisi 1**

  Sebuah ***path*** sepanjang n dari u ke v, pada suatu graph adalah suatu barisan edge $e_1, \ldots, e_n$ pada graph sedemikian hingga
  $f(e_1) = \{x_0,x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1,x_2\}$, … , $f(e_n) = \{x_{n-1},x_n\}$,
  dengan $x_0 = u$ dan $x_n = v$.

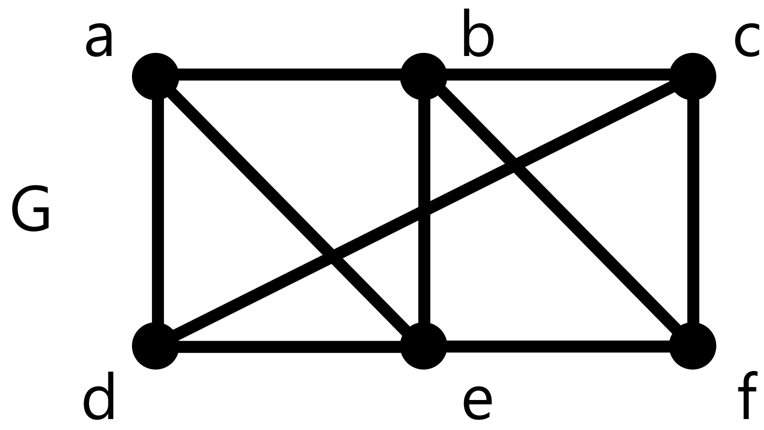
Path & Circuit

Catatan

- Suatu ***path*** disebut sebagai ***circuit*** jika dimulai dan diakhiri pada vertex yang sama, yaitu jika u = v.
- Suatu path atau circuit disebut ***simple*** jika tidak mengandung edge yang sama lebih dari satu kali.
- Suatu path atau circuit disebut ***melewati*** or ***melintasi*** vertex-vertex x_1, x_2, …, x_{n-1}.

Path & Circuit

Contoh



- a, d, c, f, e merupakan suatu ***simple path*** dengan panjang 4 sebab {a, d}, {d, c}, {c, f}, dan {f, e} semuanya merupakan edge.
- d, e, c, a ***bukan*** suatu path, sebab {e, c} bukan edge.
- b, c, f, e, b merupakan suatu ***circuit*** dengan panjang 4 sebab {**b**, c}, {c, f}, {f, e}, dan {e, **b**} adalah edgenya.

Graph Terhubung

- **Definisi 2**

  Suatu graph disebut ***terhubung*** jika terdapat suatu path antara setiap pasang vertex yang berbeda pada graph tersebut.

- **Teorema 1**

  Terdapat ***suatu simple path*** di antara setiap pasang vertex yang berbeda dari suatu graph yang terhubung.

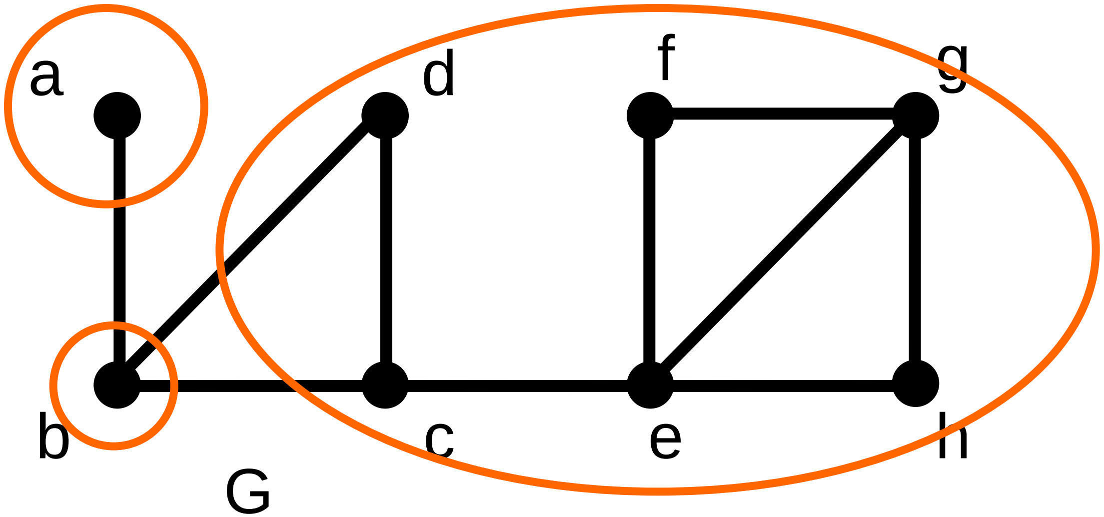
Graph Terhubung

Catatan

- Penghapusan sebuah vertex yang disebut ***cut vertex (titik artikulasi)*** dari suatu graph terhubung akan menghasilkan sebuah subgraph dengan komponen terhubung yang lebih banyak dari graph aslinya.
- Penghapusan suatu edge yang disebut ***cut edge (jembatan)*** dari suatu graph terhubung menghasilkan sebuah subgraph dengan komponen terhubung yang lebih banyak dari graph aslinya.

Graph Terhubung

Contoh:



Cut vertex dari graph G adalah b, c dan e.

Cut edge dari graph G adalah {a,b} dan {c,e}.

Isomorfisme Graph

- **Definisi**

  Simple graph $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ disebut ***isomorfis*** jika terdapat suatu fungsi bijektif f dari V_1 ke V_2 dengan sifat bahwa a dan b beradjacent di G_1 jika dan hanya jika $f(a)$ dan $f(b)$ beradjacent di G_2, untuk setiap a dan b di V_1.

  Fungsi f yang seperti ini disebut suatu ***isomorfisma***.

Isomorfisme Graph

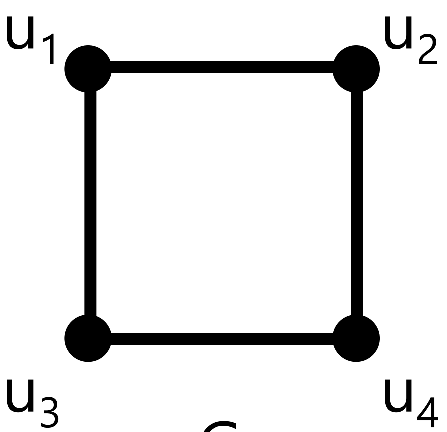
Contoh

- Tunjukkan bahwa graph G(V, E) dan H(W,F) isomorfis.

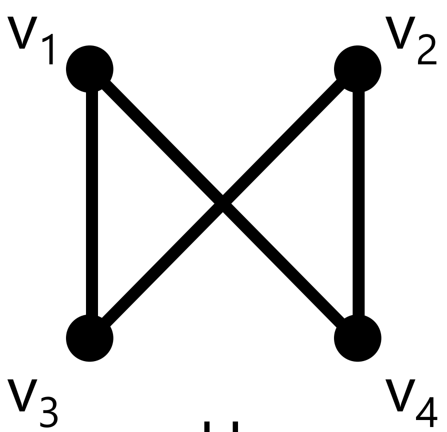
Isomorfisme Graph

- **Jawab**

  Fungsi F dengan:
  $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$, $f(u_4) = v_2$
  adalah suatu pemetaan bijektif dari V ke W.



G

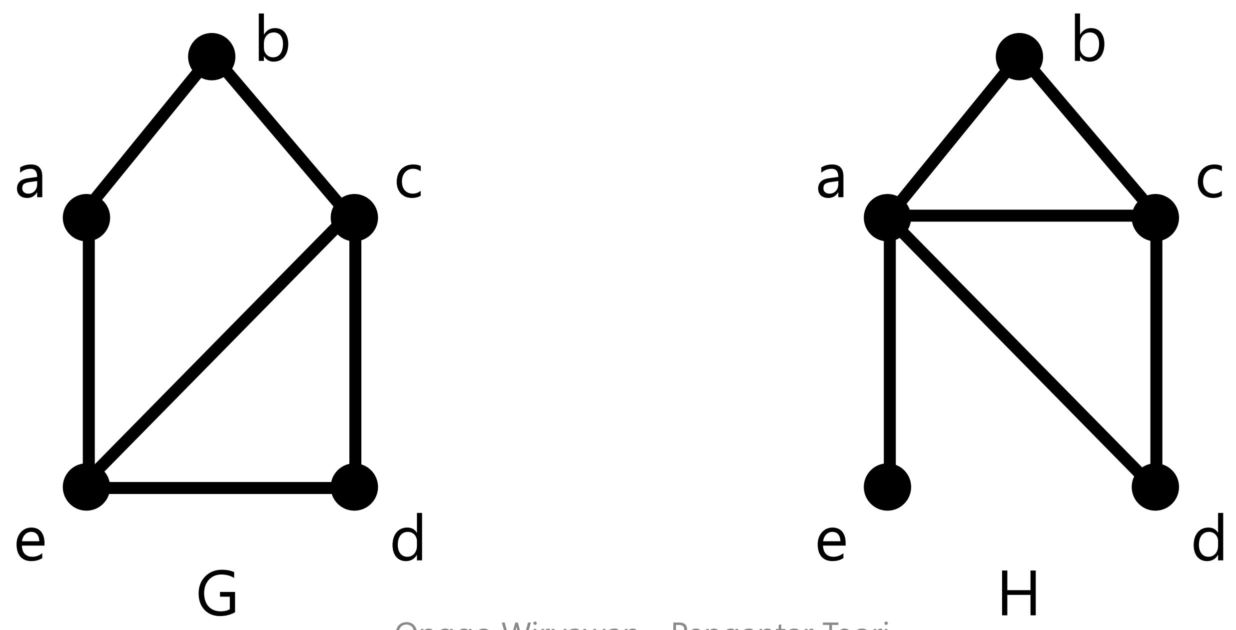


H

Isomorfisme Graph

Contoh

- Tunjukkan bahwa graph G(V, E) dan H(W,F) tidak isomorfis.



Isomorfisme Graph

- **Jawab**

  Perhatikan banyaknya edge & vertex.
  Perhatikan degree dari setiap vertex.