Relasi Rekursi

Matematika Informatika 4

Onggo Wiryawan

@OnggoWr

Definisi

Definisi 1

- Suatu ***relasi rekursi*** untuk sebuah barisan $\{a_n\}$ merupakan sebuah rumus untuk menyatakan a_n ke dalam satu atau lebih suku-suku sebelumnya dari barisan tersebut, untuk suatu bilangan bulat nonnegatif n.
- Suatu barisan disebut ***solusi*** dari sebuah relasi rekursi jika suku-suku pada barisan tersebut memenuhi relasi rekursinya.

Contoh 1

Contoh 1

- Misal $\{a_n\}$ barisan yang memenuhi relasi rekursi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n \geq 2$, lalu misalkan $a_0 = 3$ dan $a_1 = 5$. Tentukan nilai a_2 dan a_3.

Jawab

- Karena $a_2 = a_1 - a_0$, maka $a_2 = 2$.
  Karena $a_3 = a_2 - a_1$, maka $a_3 = -3$. ♥

Contoh 2

Contoh 2

- Untuk bilangan bulat nonnegatif n, apakah barisan $a_n = 3n$, $a_n = 2^n$ dan $a_n = 5$ merupakan solusi bagi relasi rekursi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$?

Jawab

(i) Misal $a_n = 3n$, untuk bilangan bulat nonnegatif n. Maka

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$
$$a_n = 2\big(3(n-1)\big) - 3(n-2)$$
$$a_n = 3n.$$

Maka $a_n = 3n$ merupakan solusi bagi relasi rekursi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

Contoh 2

(ii) Misal $a_n = 2^n$, untuk bilangan bulat nonnegatif n. Maka

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$
$$a_n = 2\left(2^{(n-1)}\right) - 2^{(n-2)}$$
$$a_n = 2^n - 2^{n-2}$$
$$a_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2^n \cdot \frac{3}{4} \neq 2^n.$$

Maka $a_n = 2^n$ bukan merupakan solusi bagi relasi rekursi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

Contoh 2

(iii) Misal $a_n = 5$, untuk bilangan bulat nonnegatif n. Maka

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$$
$$a_n = 2(5) - 5$$
$$a_n = 5$$

- Maka $a_n = 5$ merupakan solusi bagi relasi rekursi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$. ♥

Catatan: ***Kondisi awal*** (a_0) akan menentukan suku-suku pada barisan berikutnya.

Contoh 3

Contoh 3

- Tentukan barisan yang merupakan solusi dari relasi rekursi $a_n = 3a_{n-1}$, jika diketahui $a_0 = 2$.

Jawab

$$a_n = 3a_{n-1}$$
$$a_n = 3(3a_{n-2}) = 3^2 \cdot a_{n-2}$$
$$a_n = 3\big(3(3a_{n-3})\big) = 3^3 \cdot a_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 3^n \cdot a_{n-n} = 3^n \cdot a_0$$
$$a_n = 2 \cdot 3^n$$

- Sehingga barisan $a_n = 2 \cdot 3^n$ merupakan solusi dari relasi rekursi $a_n = 3a_{n-1}$ dengan nilai awal $a_0 = 2$.

Jenis-jenis Relasi Rekursi

Definisi 2

- Suatu relasi rekursi linier homogen berderajat k dengan koefisien konstan memiliki bentuk umum:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

dengan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ adalah bilangan real, dan $c_k \neq 0$.

Jenis-jenis Relasi Rekursi

- Perhatikan tabel berikut ini:

Relasi Rekursi	Linier	Homogen	Koef. Konst.	Degree
$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$	✔	✔	✔	2
$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$	✖	✔	✔	2
$H_n = 2H_{n-1} + 1$	✔	✖	✔	1
$b_n = nb_{n-1}$	✔	✔	✖	1

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Contoh 1

- Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, dengan $a_0 = 2$, dan $a_1 = 7$.

Jawab

- Bentuk ***persamaan karakteristik*** dari relasi rekursi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$.
- Pindahkan semua suku ke ruas kiri.

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$

- Karena relasi di atas memiliki derajat 2, maka bentuk polinomial derajat 2 yang bersesuaian dengan masing-masing suku dari relasi tersebut, perhatikan setiap koefisien dan tanda tiap suku.

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

$$a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^2 - r - 2r^0 = 0$$
$$r^2 - r - 2 = 0$$

- Persamaan di atas disebut persamaan karakteristik, dan memiliki 2 akar berbeda yaitu $r_1 = 2$ dan $r_2 = -1$ yang disebut ***akar-akar karakteristik***.

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Bentuk ***solusi umum*** dari relasi rekursi yang memiliki 2 akar ***berbeda*** adalah

$$a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n$$

- Sehingga solusi umum dari relasi rekursi di atas adalah

$$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot (-1)^n$$

- Untuk suatu c_1, c_2 bilangan real.

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Untuk mendapatkan solusi khusus, gunakan nilai awal yang diketahui.

$$a_0 = 2 = c_1 \cdot 2^0 + c_2 \cdot (-1)^0$$

$$2 = c_1 + c_2 \quad \text{... (1)}$$

$$a_1 = 7 = c_1 \cdot 2^1 + c_2 \cdot (-1)^1$$

$$7 = 2c_1 - c_2 \quad \text{... (2)}$$

- Persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan metode substitusi/eliminasi untuk mendapatkan $c_1 = 3$ dan $c_2 = -1$.
- Sehingga solusi khusus dari relasi rekursi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ adalah $a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n$. ♥

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Contoh 2

- Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$, dengan $a_0 = 1$, dan $a_1 = 6$.

Jawab

- Bentuk persamaan karakteristik dari relasi rekursi tersebut.

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$
$$\downarrow$$
$$a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar karakteristik ***kembar*** yaitu $r_1 = r_2 = 3$.
- Bentuk ***solusi umum*** dari relasi rekursi yang memiliki 2 akar ***kembar*** adalah

$$a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot n r_1^n$$

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Sehingga solusi umum dari relasi rekursi di atas adalah

$$a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot n(3)^n$$

- Untuk suatu c_1, c_2 bilangan real.
- Untuk mendapatkan solusi khusus, gunakan nilai awal yang diketahui.

$$a_0 = 1 = c_1 \cdot 3^0 + c_2 \cdot 0(-1)^0$$

$$1 = c_1 \quad \dots (1)$$

$$a_1 = 6 = c_1 \cdot 3^1 + c_2 \cdot 1(3)^1$$

$$6 = 3c_1 + 3c_2 \quad \dots (2)$$

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Persamaan (1) dan (2) dapat diselesaikan dengan metode substitusi/eliminasi untuk mendapatkan $c_1 = 1$ dan $c_2 = 1$.
- Sehingga solusi khusus dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ adalah $a_n = 3^n + n \cdot 3^n$. ♥

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Contoh 3

- Tentukan solusi dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$, dengan $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ dan $a_2 = 15$.

Jawab

- Bentuk persamaan karakteristik dari relasi rekursi tersebut.

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$
$$\downarrow$$
$$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0$$
$$\downarrow$$
$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Persamaan karakteristik di atas memiliki akar-akar karakteristik ***berbeda*** yaitu $r_1 = 1$, $r_2 = 2$ dan $r_3 = 3$.
- Bentuk ***solusi umum*** dari relasi rekursi yang memiliki 3 akar ***berbeda*** adalah

$$a_n = c_1 \cdot r_1^n + c_2 \cdot r_2^n + c_3 \cdot r_3^n$$

- Sehingga solusi umum dari relasi rekursi di atas adalah

$$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n$$

- Untuk suatu c_1, c_2, c_3 bilangan real.

Menentukan Relasi Rekursi Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

- Untuk mendapatkan solusi khusus, gunakan nilai awal yang diketahui.

$$a_0 = 2 = c_1 + c_2 + c_3$$
$$a_1 = 5 = c_1 + 2c_2 + 3c_3$$
$$a_2 = 15 = c_1 + 4c_2 + 9c_3$$

- 3 persamaan di atas dapat diselesaikan dengan metode substitusi/eliminasi untuk mendapatkan $c_1 = 1$, $c_2 = -1$ dan $c_3 = 2$.
- Sehingga solusi khusus dari relasi rekursi $a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$ adalah $a_n = 1 - 2^n + 2 \cdot 3^n$. ♥

Latihan

Latihan

Tentukan solusi khusus dari relasi-relasi rekursi berikut ini.

1. $a_n = 2a_{n-1}$, $a_0 = 3$
2. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$
3. $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$
4. $a_n = 4a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$
5. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$ dan $a_2 = 0$
6. $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$, $a_0 = 7$, $a_1 = -4$ dan $a_2 = 8$